



GUÍA DOCENTE DE MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS II

Curso 2008-09

1 - DATOS DESCRIPTIVOS DA MATERIA

1.1 DESCRIPCIÓN DA MATERIA

Código e nome da materia:	191204 Matemáticas para Economistas II
Tipo de materia:	Troncal e anual
Ciclo e curso no que se imparte:	1º ciclo, 2º curso
Nº de créditos:	créditos (6 teóricos e 3 prácticos)

1.2 REQUISITOS PREVIOS

O programa desta materia é a continuación do de Matemáticas para Economistas I. Aínda que non existe ningunha limitación administrativa que che impida cursar esta materia sen ter aprobada a de 1º curso, é fácil comprender que terás maiores dificultades se non dominas toda unha serie de conceptos e métodos que se estudan no curso anterior. Por exemplo, serache moito máis fácil entender e manexar os distintos conceptos relativos ás funcións de varias variables se sabes o que ocorre no caso dunha variable e aprenderás a integrar sen dificultade se dominas as derivadas.

Tamén é recomendable ter algúns coñecementos básicos de informática (manexo de internet, correo electrónico,...).

1.3 DATOS DO PROFESORADO DA MATERIA

Profesora:	Rosalía Porto Vila
Departamento:	Economía Cuantitativa
Despacho:	105
Extensión telefónica:	11517
Correo electrónico:	rosalia.porto@usc.es
Lingua empregada :	Galego

1.4 TUTORÍAS

Haberá tres modalidades de tutoría:

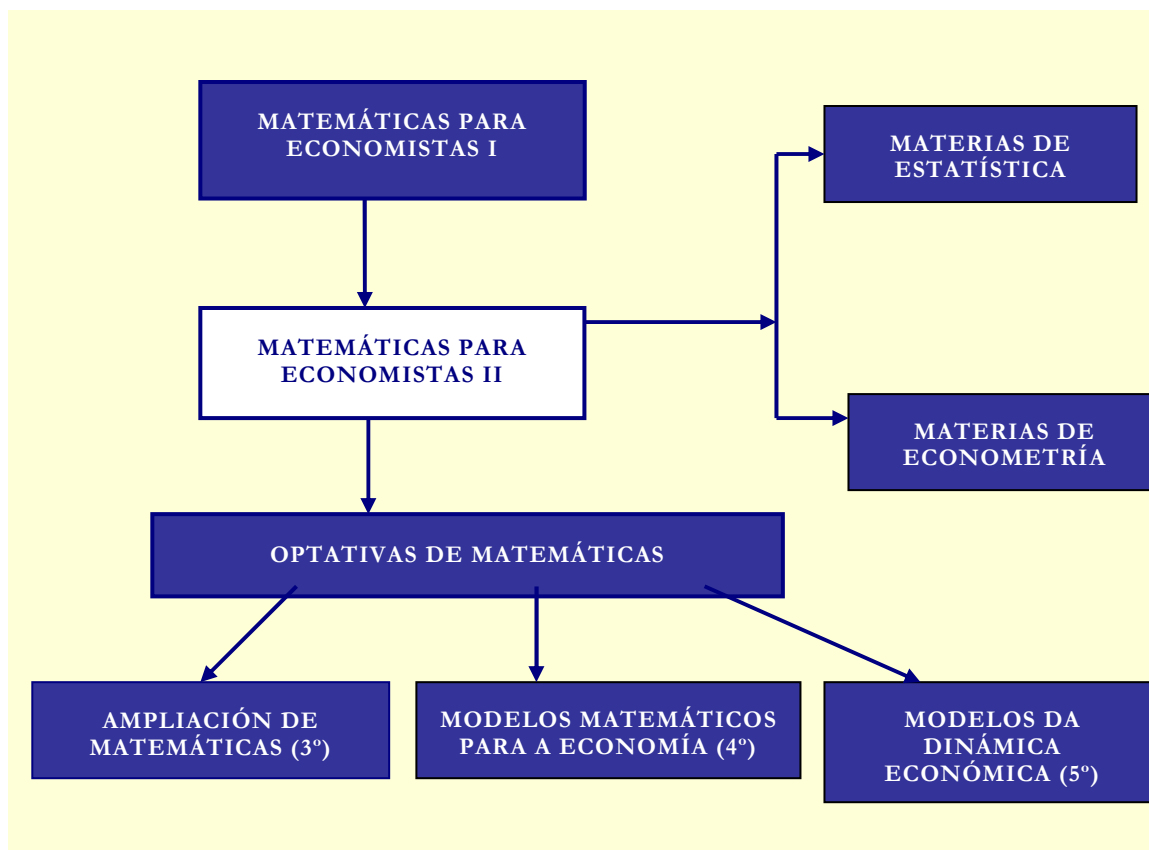
- Tutorías virtuais: desde o curso virtual da materia poderás consultar en calquera momento as dúbidas que che xurdan. Este tipo de tutoría está pensado para que poidas preguntar cuestións puntuais desde calquera lugar. Con todo, ten en conta que a resposta non é inmediata, aínda que procurarei atendervos todos os días. Así, en xeral, terás a resposta á túa consulta ao día seguinte (os días laborables).
- Tutorías obrigatorias: Unha vez ao mes terás que asistir obrigatoriamente a unha tutoría en grupos de dez alumnos como máximo. Nesta tutoría discutiránse os distintos aspectos do traballo realizado durante o mes así como as dificultades que se vos vaian presentando. Servirán tamén para ir avaliando periodicamente o traballo que levades feito e facervos as recomendacións oportunas.
- Tutorías individuais voluntarias: todas as semanas haberá unhas horas que serán para atendervos en persoa se o necesitades.
- As tutorías presenciais serán os mércores de 17 a 19 h no despacho 105. Reservaremos, en xeral, o derradeiro mércores de cada mes para as tutorías obrigatorias.

2 - SENTIDO DA MATERIA NO PERFIL DA TITULACIÓN

2.1 BLOQUE FORMATIVO AO QUE PERTENCE E SITUACIÓN DA MATERIA NEL

A materia pertence ao bloque formativo que podemos chamar “Métodos Cuantitativos para a Economía” integrado polas materias de matemáticas, estatística e econometría.

No seguinte esquema poderás ver a relación desta materia coas restantes do devandito bloque formativo.



As materias de matemáticas na licenciatura de Economía teñen un carácter basicamente instrumental e de uso xeneralizado nas materias de economía con contido cuantitativo. Case calquera manual básico de economía utiliza símbolos matemáticos para formalizar conceptos e expoñer problemas e teoremas matemáticos para axudarse nos seus razoamentos económicos.

Esta materia é a última obrigatoria de matemáticas dentro do plan de estudos. Isto significa que nela débese completar a formación matemática básica que se necesita para emprender con éxito o estudo tanto das restantes materias do mesmo bloque formativo como doutras da licenciatura tales como microeconomía, macroeconomía ou economía da empresa, que precisan ferramentas matemáticas.

Ademais de adquirir os correspondentes coñecementos, esta materia permitiranos mostrar a utilidade da linguaxe matemática para formular e tratar con precisión os fenómenos económicos.

2.2 INTERESE DA MATERIA PARA OS FUTUROS PROFESIONAIS

Fai varias décadas que as matemáticas penetraron na economía de maneira sólida e xeneralizada, aínda así a necesidade por parte dos economistas de utilizar as técnicas matemáticas como unha ferramenta máis á súa disposición, non debería converterse nunca nun fin por elas mesmas.

A ciencia económica non debe aportar só recomendacións cualitativas xenerais senón tamén métodos cuantitativos concretos e suficientemente precisos que poidan prover a elección obxectiva entre decisións económicas. Non se pode esquecer que o soporte matemático axuda aos economistas a expresar os seus pensamentos teóricos e foi imprescindible no desenvolvemento de técnicas de obtención e análise de datos, tanto no campo da economía xeral como da xestión empresarial.

Todo isto significa que, aínda que os traballos aos que vos dedicaredes os futuros economistas son moi variados, en maior ou menor grado necesitaredes dunha bagaxe matemática de certa consideración para afrontar os retos profesionais.

Por outra banda, convén ter en conta que as matemáticas axudaranvos non só como un instrumento útil e necesario para o voso labor profesional, senón tamén capacitándovos para o pensamento abstracto e ata vos axudarán á hora de razoar e expoñer ordenadamente as vosas ideas.

3 - OBXECTIVOS E COMPETENCIAS A TRABALLAR NA MATERIA

Dáse por suposto que as deficiencias básicas coas que algúns accededes á Universidade xa se emendaron en Matemáticas para Economistas I e que todos tedes neste momento o nivel mínimo requirido para cursar esta materia. Como xa se sinalou anteriormente, para moitos alumnos esta é a última materia de matemáticas que estudades na licenciatura. Por iso, é imprescindible completar os coñecementos matemáticos mínimos que necesitaredes pero tamén, e non menos importante, debedes ir adquirindo a capacidade para formular problemas e resolvelos empregando razoamentos lóxicos. Seremos máis esixentes en todo o relacionado co rigor e a expresión formal.

Desenvolvendo máis estas ideas, sinaláanse a continuación detalladamente os principais obxectivos que pretendemos acadar:

3.1	OBXECTIVOS	RELACIONADOS	COS	NOVOS
	COÑECEMENTOS	E HABILIDADES	PROPIOS	DOS CONTIDOS
	DA MATERIA			

- Manexar o concepto de diferenciabilidade e utilizar correctamente o concepto de derivada en aplicacións ao campo da Economía.
- Manexar funcións compostas e homoxéneas (especialmente as súas aplicacións a funcións de produción) como ferramentas indispensables na análise económica.
- Manexar o concepto de convexidade e ser capaces de formular e resolver problemas de optimización.
- Coñecer as técnicas para o cálculo da integral definida e impropia, de maneira que poidan ser utilizadas tanto en problemas económicos como noutras materias de índole cuantitativa.
- Comprender situacións sinxelas da dinámica económica a través das ecuacións diferenciais e en diferenzas finitas.
- Empregar o programa Maple para obter (e interpretar) límites, gráficas, derivadas, integrais e tamén para resolver problemas de optimización.

3.2	OBXECTIVOS	RELACIONADOS	CO	DOMINIO	DE	CERTAS
	FERRAMENTAS	DE	APRENDIZAXE	E	DE	FORMACIÓN
	(COMPETENCIAS	XENÉRICAS)				

- Capacidade de abstracción, formalización, análise, síntese e razoamento, dándolle especial importancia á habilidade para argumentar con criterios racionais e á capacidade de construír un texto escrito comprensible e organizado.
- Capacidade para traballar en grupo á hora de enfrontarse á resolución dun problema.
- Capacidade para buscar información en Internet.

4 - CONTIDOS DA MATERIA

Os contidos desta materia pódense agrupar en catro bloques:

- CÁLCULO DIFERENCIAL
- OPTIMIZACIÓN
- CÁLCULO INTEGRAL
- INTRODUCCIÓN Á ANÁLISE DINÁMICA

Comezaremos co estudo do **cálculo diferencial** para funcións de varias variables. Deste xeito continuarás ampliando de forma natural os coñecementos adquiridos no curso pasado. Alí o último que estudaches foi a diferenciación de funcións dunha variable, o que supón que xa tes unha boa base para dar o paso ás de varias variables.

Neste bloque temos as leccións seguintes:

- Tema 1: Diferenciación de funcións de varias variables reais.
- Tema 2: Diferenciación dunha aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .
- Tema 3: Teoremas relativos á diferenciación de funcións.
- Tema 4: Funcións homoxéneas e funcións implícitas.

Neste momento xa tes os coñecementos necesarios para iniciar o estudo dunha parte das matemáticas que ten especial interese para a economía: a **optimización matemática**. Os tipos de problemas que estuda a optimización matemática son demasiado amplos para abordalos neste curso. Xa que logo, limitarémonos a formular este tipo de problemas e trataremos de que coñezas os métodos para resolver algúns deles. Para isto, dentro deste bloque inclúense as seguintes leccións:

- Tema 5: Convexidade de conxuntos e funcións.
- Tema 6: Formulación e resolución gráfica de problemas de optimización.
- Tema 7: Optimización sen restricións.
- Tema 8: Optimización con restricións de igualdade.

Tamén é imprescindible que coñezas algunhas cuestións básicas do **cálculo integral**. Lograralo co estudo das seguintes leccións:

- Tema 9: Integral de Riemann de funcións dunha variable real.
- Tema 10: Cálculo de primitivas.

-
- Tema 11: Integral de Riemann para funcións de varias variables.

Para rematar e co obxectivo de que empeces a coñecer algúns conceptos e métodos básicos para o estudo dos modelos dinámicos (nos que intervéñ a variable "tempo") e dentro do bloque **introdución á análise dinámica** atópanse as seguintes leccións:

- Tema 12: Ecuacións en diferenzas.
- Tema 13: Ecuacións diferenciais.

A continuación tes unha explicación detallada de cada tema do programa desta materia. Sen embargo, hai unha serie de cuestións que serán comúns para todos os temas e que, para non repetilas innecesariamente, coméntanse brevemente a continuación:

- Terás ao teu dispor no curso virtual da materia os seguintes materiais para preparar os temas: apuntes teóricos, problemas resoltos e problemas propostos clasificados segundo os distintos graos de dificultade.
- Dadas as características da materia, o método de traballo aconsellado para que prepares os temas é, en xeral, o mesmo para todos eles. Por isto despois dos temas do programa tes un epígrafe adicado a esta cuestión. Non obstante, se nalgún caso hai algunha diferenza destacable, inclúírase no tema correspondente.

5 - TEMARIO DETALLADO

BLOQUE 1: CÁLCULO DIFERENCIAL

O cálculo diferencial converteuse desde o último terzo do século XIX nunha das ferramentas fundamentais de análise para os economistas. Pódese dicir que é unha das partes das matemáticas que máis aplicacións ten no campo da economía, e tamén das máis utilizadas para explicar contidos propios doutras materias da licenciatura. Por esta razón será tratado con certa profundidade neste curso, para completar os coñecementos que adquiriches o curso pasado.

Ao finalizar este bloque posuirás os coñecementos fundamentais sobre a diferenciabilidade dunha función e as súas aplicacións e interpretacións e estarás en condicións de empregalos tanto noutras materias como nos restantes temas do programa.

Este bloque temático é fundamental para poder comprender os seguintes. O concepto de función diferenciable e o seu significado estará presente en todos os temas do programa.

En calquera caso, no que segue, ao comezo da información sobre cada lección atoparás uns cadros que che indicarán claramente cales son os temas do programa que necesitan desta para a súa comprensión.

En canto á **bibliografía**, dado que este bloque de temas é moi homoxéneo, utilizarás a mesma para todas as leccións. O texto base será o seguinte:

- **Barrios García, J. A. e outros (2005)**, Análisis de funciones en Economía y Empresa. Un enfoque interdisciplinar. Ed. Díaz de Santos.

Un texto complementario no que os conceptos veñen ben explicados e que che pode axudar a entender estes temas é:

- **Sydsaeter, K. e Hammond, P. (1998)**, *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice-Hall.

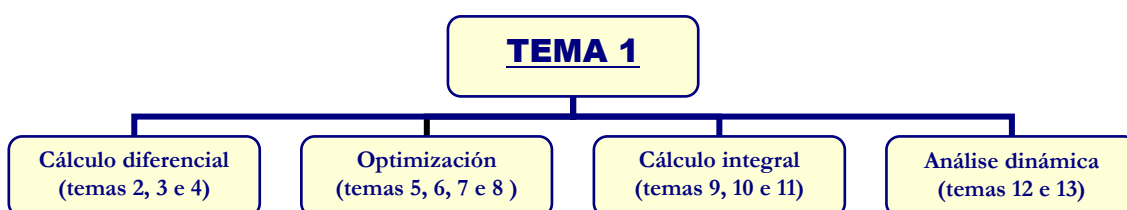
Tamén é aconsellable que utilices algún libro con problemas resoltos.

- **Alegre Escolano, P. e outros (1995)**, *Matemáticas empresariales*. Ed. AC

De ser necesario que consultes algún outro manual para completar algún aspecto concreto, indicárase oportunamente. Ademais terás mais adiante no apartado correspondente á bibliografía as referencias doutros libros que che poden ser de utilidade.

TEMA 1: DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REAIS

1.- Sentido do tema dentro do programa: Este tema é básico pois no contexto económico con frecuencia fai falta estudar o efecto que cambios nunha ou varias variables teñen sobre outra. Para isto é preciso coñecer os conceptos de derivada (direccional e parcial) e de diferencial e entender o seu significado. Ademais desde o punto de vista matemático estes conceptos son fundamentais para comprender a meirande parte dos demais contidos do programa. No seguinte organigrama podes ver ás leccións para as que é imprescindible os conceptos que aprenderás nesta. Como podes ver son todas as do programa.



2.- Epígrafes do tema:

- Derivada direccional. Definición e interpretación.
- Derivada parcial. Definición e significado. Interpretación económica.
- Vector gradiente. Propiedades.
- Diferencial dunha función nun punto. Definición e interpretación.
- Relación entre continuidade e diferenciabilidade.
- Condicións necesarias e suficientes para a diferenciabilidade.
- Aplicacións económicas.

3.- Materiais para traballar o tema:

Como xa sabes tes o material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 3, pax. 164–179 e 184–187). Ademais na páxina 199 do libro tes varias direccións de internet que conteñen información de interese relacionada con este tema.

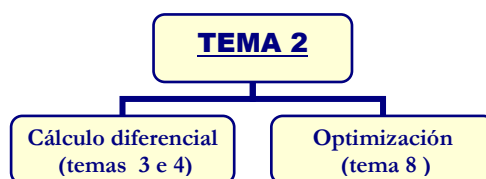
4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que ter moi claros os conceptos de derivada direccional, derivada parcial e diferencial. Deberás saber cando existen e como se calculan. Ademais é moi importante que saibas interpretar o que significan para que entendas conceptos de uso común en economía como a produtividade marxinal, a elasticidade da demanda, etc.

TEMA 2: DIFERENCIACIÓN DUNHA APLICACIÓN DE \mathbb{R}^N EN \mathbb{R}^M

1.- Sentido do tema dentro do programa: Este tema é a continuación natural do anterior. Trátase de estudar a diferenciabilidade no caso dunha aplicación en lugar dunha función. Terás que aprender os conceptos equivalentes aos da lección anterior pero agora para aplicacións.

É necesario comprendelo ben xa que os seus contidos necesítanse nos temas que se indican a continuación:



2.- Epígrafes do tema:

- Definición de aplicación diferenciabile.
- Relación entre a diferenciabilidade dunha aplicación e a das súas funcións compoñentes.
- Concepto de matriz jacobiana.
- Aplicación continuamente diferenciabile.
- Regra da cadea.

3.- Materiais para traballar o tema:

Os catro primeiros epígrafes deste tema son moi sinxelos se entendiches ben a lección anterior. Para preparalos chegarache co material do curso virtual. Para o estudo da regra da cadea convenche consultar tamén o texto base (capítulo 4, páxinas 205-218).

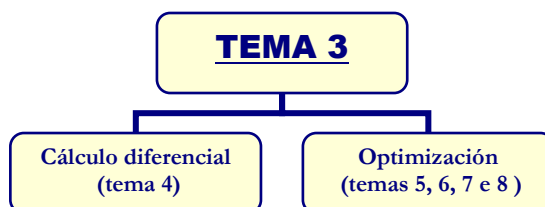
4.- Contidos esenciais:

Nesta lección son fundamentais dúas cuestións: que coñezas e calcules correctamente a matriz jacobiana e que comprendas e saibas aplicar a regra da cadea. Ademais, aínda que che poida resultar un pouco difícil, é interesante que manexes con soltura as distintas notacións que se poden usar para a regra da cadea. Non esquezas que un dos obxectivos desta materia é que adquiras os coñecementos que logo usarás noutras e non en todas vas empregar a mesma notación.

TEMA 3: TEOREMAS RELATIVOS Á DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES

1.- Sentido do tema dentro do programa: Nesta lección continuarás estudando cuestións relacionadas coa diferenciabilidade das funcións. Mais concretamente, xa sabes calcular e interpretar as derivadas parciais e a diferencial dunha función. Trátase de avanzar por este camiño calculando derivadas de orde superior e xeneralizando o concepto de diferencial mediante o polinomio de Taylor.

Os temas do programa nos que aplicarás directamente os coñecementos adquiridos neste son os seguintes:



2.- Epígrafes do tema:

- Derivadas parciais sucesivas.
- Matriz hessiana.
- Teorema de Schwarz.
- Polinomio de Taylor.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 3, pax. 170–171 e 179–182).

4.- Contidos esenciais:

Nesta lección tes que insistir no concepto de derivada parcial para calcular as de orde superior a un. Tamén é importante que saibas calcular a matriz hessiana xa que terá gran importancia no estudo da convexidade e na resolución dalgúns problemas de optimización.

TEMA 4: FUNCIONES HOMOXÉNEAS E FUNCIONES IMPLÍCITAS
--

1.- Sentido do tema dentro do programa: Con este tema remataremos o bloque que chamamos cálculo diferencial. Para completalo terás que coñecer algúns resultados sobre as funcións homoxéneas e as implícitas, resultados relacionados coa diferenciabilidade.

As funcións homoxéneas son un tipo de funcións que teñen especial importancia na economía. A súa aplicación permite o estudo de funcións de utilidade, oferta, demanda, produción, custos... xa que permiten caracterizar de maneira sistemática o cambio do valor dunha magnitude cando as variables das que depende varían na mesma proporción. No caso das funcións de produción a homoxeneidade ten especial relevancia ao permitir expresar a existencia de rendementos de escala.

Tamén é importante o estudo das funcións implícitas. En moitas ocasións deberás estudar unha magnitude que depende de varias variables pero de tal maneira que a expresión desa dependencia ven dada por unha ecuación que non che permite desaxala.

O que vas estudar neste tema serache moi útil para aplicalo noutras materias, pero non será necesario para a comprensión das restantes leccións do programa.

2.- Epígrafes do tema:

- Definición de función homoxénea. Interpretación.
- Propiedades das funcións homoxéneas.
- Teorema de Euler. Aplicacións económicas.
- Definición de función implícita.
- Teorema de existencia da función implícita.
- Aplicacións económicas das funcións implícitas.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 4, pax. 226–245 e capítulo 5, pax. 267–278 e 282-304).

4.- Contidos esenciais:

Nesta lección todo é importante, precisamente pola súa aplicación económica. O fundamental é que saibas cando te atopas fronte a unha función homoxénea e que consecuencias económicas se derivan dese feito. Tamén é moi importante que recoñezas e derives con soltura as funcións implícitas xa que terás que facelo con frecuencia.

BLOQUE 2: OPTIMIZACIÓN

En moitos problemas económicos atopámonos ante a necesidade de utilizar de maneira óptima recursos escasos; é dicir, temos que formular e resolver un problema de optimización. O criterio máis común de elección de alternativas en economía é maximizar (o beneficio dunha empresa, a utilidade do consumidor, a taxa de crecemento da economía dun país, etc.) ou minimizar (o custo de produción, dun produto, etc.).

A optimización pódese considerar como a procura da mellor solución, entre as posibles, dun determinado problema. Este exercicio que realizamos acotío cada vez que temos que elixir a máis axeitada entre diferentes opcións, en ocasións e se a natureza do problema o permite, require a súa formulación en termos matemáticos, previa á procura da solución óptima.

Unha vez expresado o problema en linguaxe matemática, é necesario dispoñer de técnicas que permitan descubrir se este ten solución ou non, e en caso de tela, calculala. A teoría que nos proporciona os resultados e ferramentas para estudar este tipo de problemas é a Optimización Matemática. O seu desenvolvemento non é recente, pois, aínda que os resultados máis importantes producíronse nos anos corenta e cincuenta do pasado século, moitos dos resultados coñecíanse xa no século XVIII.

Como veremos, son moi diversas as situacións nas que se suscitan problemas de optimización e iso dá lugar a que tamén o sexan os métodos para abordar o seu estudo e resolución. Neste curso tes que estudar moitas outras cousas polo que, como xa se dixo na descrición xeral dos contidos, limitarémonos a formular en xeral os problemas e a resolver algúns deles.

Neste bloque empregarás o mesmo texto base:

- **Barrios García, J. A. e outros (2005)**, Análisis de funciones en Economía y Empresa. Un enfoque interdisciplinar. Ed. Díaz de Santos.

Tamén che resultará útil o que segue que ten tanto teoría como problemas resoltos e propostos.

- **Pérez-Grasa, I., Minguillón, E. e Jarne, G. (2001)**, Matemáticas para la economía. Programación matemática y sistemas dinámicos. ED. McGraw-Hill.

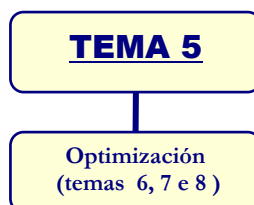
Con todo, como libro de problemas aconséllоче o seguinte que é moi completo.

- **Barbolla, R., Cerdá, E. e Sanz, P. (2001)**, Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía. Ed. Prentice-Hall.

TEMA 5: CONVEXIDADE

1.- Sentido do tema dentro do programa: Antes de comezar de feito co estudo dos problemas de optimización, é necesario que teñas algúns coñecementos sobre convexidade pois, como verás máis adiante, esta propiedade xoga un papel importante na optimización. Xa que logo, nesta primeira lección do bloque centrarémonos na análise da convexidade de conxuntos e dos diferentes tipos de convexidade ou concavidade das funcións.

Esta lección é fundamental para que comprendas as seguintes deste bloque.



2.- Epígrafes do tema:

- Conxuntos convexos. Definición e propiedades.
- Funcións cóncavas e convexas. Definición e propiedades.
- Relación entre a convexidade dunha función e dun conxunto.
- Condicións para a convexidade de funcións diferenciables.
- Funcións cuasicóncavas e cuasiconvexas.
- Caracterización da cuasiconvexidade para funcións diferenciables.
- Relacións entre a convexidade e a cuasiconvexidade dunha función.

3.- Materiais para traballar o tema:

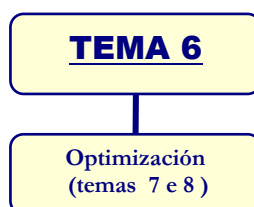
O material do curso virtual. Para preparar esta lección, en lugar do texto base deberás utilizar o segundo da bibliografía deste bloque (Pérez-Grasa, capítulo 1 , páxinas 1-29). Aquí atoparás os contidos do tema moito mais completos que no texto base.

4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que saber se un conxunto é convexo ou non. É necesario que cando vexas a gráfica dunha función poidas reconecer se é cóncava ou convexa. Tamén deberás estar en condicións de saber comprobar se unha función é cóncava, convexa, cuasicóncava ou cuasiconvexa, principalmente no caso das funcións diferenciables.

TEMA 6: FORMULACIÓN E RESOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1.- Sentido do tema dentro do programa: Este tema é de feito o primeiro de optimización. Nel verás como se pode formalizar matematicamente un problema de optimización. A optimización caracterízase por analizar situacións conflitivas nas que se pretende elixir a opción máis beneficiosa. En moitas ocasións perséguese fins múltiples e os medios dispoñibles para alcanzalos son limitados. Cando é posible traducir as accións en variables, os obxectivos en funcións e os medios dispoñibles en restricións, xa temos un problema de optimización. Dado que este é o tema inicial, estudarás nel cuestións xerais que che prepararán para abordar os seguintes.



2.- Epígrafes do tema:

- Formulación do problema.
- Definición e existencia de óptimos. Teorema de Weierstrass.
- Clasificación dos problemas de optimización.
- Programas convexos. Teorema local-global.
- Método gráfico de resolución.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 6, pax. 325–338). Ademais na páxina 379 do libro tes varias direccións de internet que conteñen información de interese relacionada con este tema, aínda que neste caso todas están en inglés.

4.- Contidos esenciais:

Ao rematar o estudo desta lección tes que saber que tipos de problemas son de optimización e serás capaz de traducilos a termos matemáticos para posteriormente, co que aprendas nas próximas leccións, poder solucionarlos. Ademais poderás resolver graficamente algúns problemas sinxelos.

Non te esquezas tampouco dos dous teoremas que se inclúen na lección pois terás que aplicalos a cada pouco nas seguintes, sobre todo o teorema local-global.

TEMA 7: OPTIMIZACIÓN SEN RESTRICIÓN S

1.- Sentido do tema dentro do programa: Como xa se dixo anteriormente, neste curso é imposible abarcar os numerosos problemas de optimización existentes. Limitarémonos a ver dous tipos: problemas sen restricións e con restricións de igualdade.

Evidentemente temos que comezar o estudo polos máis sinxelos (os problemas sen restricións) para logo introducir as restricións. Aínda que sería desexable que puideses estudar outros tipos de problemas, polo menos terás unha idea de como se debe abordar a procura da solución dun problema de optimización. Este coñecemento senta as bases que poidas necesitar para traballar con problemas máis complexos. Ademais pódelo completar elixindo en 4º curso a materia optativa Modelos Matemáticos para a Economía.

Como esta lección é a primeira na que calcularás analiticamente as solucións dun problema de optimización, o método que aprenderás así como algúns conceptos necesitaralos para seguir avanzando, concretamente para o estudo da próxima e última lección deste bloque.

2.- Epígrafes do tema:

- Condición necesaria de existencia de óptimo local.
- Estudo dos puntos críticos: clasificación.
- Condición suficiente de óptimo local.
- Aplicacións económicas.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 6, pax. 346–371).

4.- Contidos esenciais:

O fundamental nesta lección é que aprendas a distinguir os distintos tipos de puntos críticos e que saibas pescudar se son óptimos ou non. Ademais non debes esquecer que os resultados estudados aquí refírense a óptimos locais posto que se basean na diferenciabilidade das funcións. Sempre que poidas trata de comprobar se tamén son óptimos globais.

TEMA 8: OPTIMIZACIÓN CON RESTRICIONES DE IGUALDADE

1.- Sentido do tema dentro do programa: Agora que xa tes unhas nocións básicas sobre o que é un problema de optimización e como se debe proceder para formulalo e resolvelo, trátase de profundar un pouco. Nesta lección estudarás os problemas con restricións de igualdade que, desde o punto de vista económico teñen moito máis sentido. Pensa que na práctica habitualmente hai limitacións, en moitos casos orzamentarias. Por exemplo, no clásico problema do consumidor, é obvio que este non dispón dunha renda ilimitada. Con todo, hai que recoñecer que a restricións de igualdade supoñen unha limitación máis á hora de reflectir fielmente a realidade. Por seguir co mesmo exemplo, non é imprescindible e ás veces nin sequera desexable que o consumidor gaste todo o seu orzamento, tan só debemos garantir que o gasto sexa menor ou igual que a renda dispoñible.

Sería desexable, polo tanto, que estudaras a optimización con restricións de desigualdade. Non obstante, desde o punto de vista matemático, para chegar a estes problemas, necesítase estudar previamente este tema. Dado que os resultados e técnicas aplicables en ambos casos son similares, aínda que non se inclúa no programa, non terás problemas para entender e estudar pola túa conta, cando o precises, o problema de optimización con restricións de desigualdade.

2.- Epígrafes do tema:

- Formulación de problemas con restricións de igualdade.
- Resolución por substitución.
- Método dos multiplicadores de Lagrange. Condición necesaria para a existencia de óptimo local restrinxido.
- Condicións suficientes de óptimo local restrinxido.
- Condicións suficientes de óptimo global restrinxido.
- Interpretación económica dos multiplicadores e aplicacións.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 7, pax. 385–418).

4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que saber resolver os problemas de optimización con restricións de igualdade e, o máis importante, tes que ser capaz de interpretar correctamente os multiplicadores de Lagrange, para sacar as conclusións económicas pertinentes.

BLOQUE 3: CÁLCULO INTEGRAL

Neste bloque pretendemos que adquiras algúns coñecementos básicos do cálculo integral. Aínda que ao chegar á Universidade suponse que xa sabes algo sobre integración, temos que profundar nos conceptos, repasar algunhas técnicas de integración e estudar algúns resultados que che serán de utilidade. Vanche a servir para resolver distintos problemas económicos aparentemente sen relación entre si.

Moitos modelos na economía esixen a resolución de integrais. En particular, atoparalas no campo da estatística para o cálculo de indicadores relevantes na análise económica xa que moitos dos conceptos máis importantes da estatística exprésanse mediante integrais de distribucións continuas de probabilidade. Tamén te atoparás coas integrais en razoamentos teóricos e análise cualitativa dentro do contexto de modelos micro e macroeconómicos, en problemas de determinación de funcións totais partindo das marxinais, en procesos que rematan nunha “suma” en variable continua, por exemplo, o cálculo de funcións de capitalización partindo de conceptos como o de xuro instantáneo, como ferramenta para resolver modelos dinámicos continuos a través das ecuacións diferenciais, etc.

Para estudar as leccións deste bloque empregarás o mesmo texto base:

- **Barrios García, J. A. e outros (2005)**, Análisis de funciones en Economía y Empresa. Un enfoque interdisciplinar. Ed. Díaz de Santos.

Tamén che será útil o seguinte texto:

- **Balbás, A., Gil, J. A., Gutiérrez, S. (2002)**, Análisis matemático para la economía II. Cálculo integral y sistemas dinámicos. Ed. AC.

Ademais é conveniente que consultes as aplicacións económicas da integral no seguinte manual:

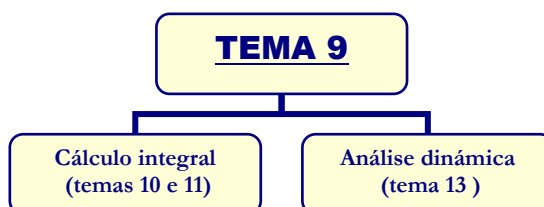
- **Sydsaeter, K. e Hammond, P. (1998)**, *Matemáticas para el análisis económico*. Ed. Prentice-Hall. Páxinas 272-278 e 296-299.

TEMA 9: INTEGRAL DE RIEMANN DE FUNCIÓNS DUNHA VARIABLE REAL

1.- Sentido do tema dentro do programa: Nesta lección comezarás a familiarizarte co cálculo integral.

Antes de calcular integrais é importante que coñezas o significado deste concepto para saber cando debes aplicalo e poder interpretar os resultados. Por esta razón este tema iníciase coa construción da integral definida e o estudo das súas propiedades. Tamén verás certas condicións que garanten a integrabilidade dunha función.

O que estudes nesta lección é fundamental para ter as nocións básicas do cálculo integral. Tamén o necesitarás para comprender as outras leccións do programa que se indican no seguinte esquema.



2.- Epígrafes do tema:

- Particións dun intervalo. Construción da integral de Riemann.
- Condicións de integrabilidade.
- Propiedades da integral de Riemann
- Concepto de primitiva.
- Teoremas fundamentais do cálculo integral

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 8, pax. 435–444). Ademais nas páxinas 478-479 do libro tes varias direccións de internet que conteñen información de interese relacionada con este tema.

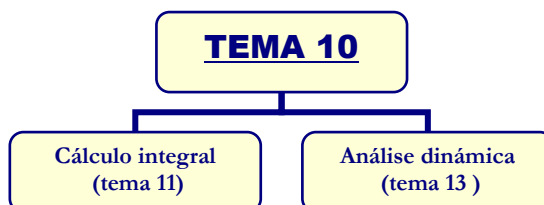
4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que ter moi claro o concepto de integral. Deberás saber cando unha función é integrable e tamén son importantes os dous teoremas fundamentais, sobre todo a regra de Barrow que che di o que tes que facer para calcular as integrais definidas.

TEMA 10: CÁLCULO DE PRIMITIVAS

1.- Sentido do tema dentro do programa: Este tema é mais ben práctico. No anterior xa viches que para calcular unha integral definida necesitas calcular previamente unha primitiva da función. Pois ben, nesta lección aprenderás algúns métodos para calcular primitivas. Ademais, unha vez que aprendas a calcular integrais, estudarás algunhas aplicacións económicas da integral

Ademais de aplicalo noutras materias, o que aprendas aquí serache imprescindible para resolver os problemas dos temas do programa que se indican a continuación.



2.- Epígrafes do tema:

- Integrais inmediatas.
- Integración por partes.
- Integración por cambio de variable.
- Integración dalgunhas funcións racionais.
- Algunhas aplicacións económicas da integral.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 8, pax. 445-469).

4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que saber calcular a integral de funcións que non sexan excesivamente complicadas e tamén debes coñecer algunhas das aplicacións do cálculo integral na economía.

TEMA 11: INTEGRAIS IMPROPIAS E MÚLTIPLES

1.- Sentido do tema dentro do programa: Neste tema formularanse novas aplicacións económicas da integral para completar as vistas nas leccións anteriores. En devanditas aplicacións aparecen integrais impropias e múltiples. Xa que logo, estudaremos as técnicas e ideas básicas sobre estes tipos de integrais que debes coñecer para poder afrontar a resolución dos novos problemas que xeran ditas aplicacións.

Os coñecementos que adquirirás nesta lección son necesarios tanto para entender os problemas económicos que se suscitarán como para aplicalos noutras materias (Matemáticas Financeiras, Estatística) pero non se aplicarán directamente nas dúas leccións que faltan para rematar o programa.

2.- Epígrafes do tema:

- Integrais impropias de primeira especie. Definición e propiedades.
- Integrais impropias de segunda especie. Definición e propiedades.
- Criterios de converxencia.
- Integrais impropias especiais: funcións gamma e beta de Euler.
- Integrais múltiples. Definición e propiedades.
- Cálculo de integrais dobres.
- Aplicacións económicas.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 9, pax. 485–516). Ademais na páxina 524 do libro tes varias direccións de internet que conteñen información de interese relacionada con este tema.

4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que manexar con soltura as integrais impropias e saber calcular polo menos integrais dobres. Tamén é importante que coñezas algunhas aplicacións económicas das mesmas.

BLOQUE 4: INTRODUCCIÓN Á ANÁLISE DINÁMICA

A principal característica dos modelos dinámicos é que consideran o tempo como unha das variables do problema. Neste curso só se pretende que aprendas algunhas técnicas sinxelas que che axuden a entender e afrontar este tipo de problemas.

É importante que adquiras polo menos unhas noicións básicas xa que os devanditos modelos teñen gran importancia na economía. Os economistas estudan a miúdo a evolución temporal de variables económicas, como o produto nacional, o tipo de interese, a oferta monetaria, a produción de petróleo, etc. As leis que gobernan o comportamento desas variables exprésanse adoito mediante unha ou varias ecuacións.

Cando se toma o tempo como unha variable discreta, é dicir, toma valores enteiros, e as ecuacións relacionan os valores das variables en distintos instantes de tempo, atoparaste coas ecuacións en diferenzas.

Se o tempo se considera como unha variable continua e as ecuacións conteñen como incógnitas funcións e as súas derivadas, estás ante as ecuacións diferenciais.

Nos dous casos estudarás as cuestións máis básicas xa que un estudo profundo requiriría moito máis tempo do dispoñible.

Para o estudo das dúas leccións deste bloque tes que cambiar de texto base xa que o que empregaches o resto do curso non inclúe estes temas.

A continuación tes algúns manuais que che poden servir de referencia para este bloque. Como texto base podes empregar o seguinte:

- **Pérez-Grasa, I., Minguillón, E. e Jarne, G. (2001)**, Matemáticas para la economía. Programación matemática y sistemas dinámicos. ED. McGraw-Hill.
- Outro libro que xa manexaches para estudar as integrais e que tamén trata estes temas é:
- **Balbás, A., Gil, J. A., Gutiérrez, S. (2002)**, Análisis matemático para la economía II. Cálculo integral y sistemas dinámicos. Ed. AC.

Tamén che pode ser útil, aínda que só para estudar as ecuacións en diferenzas, o que segue:

- **González, C., Barrios, J.A. (2000)**, *Análisis discreto en Economía y Empresa*. Ed. AC.

TEMA 12: ECUACIONES EN DIFERENZAS

1.- Sentido do tema dentro do programa: Os economistas observan variables como poden ser a renda, o consumo e o aforro en intervalos fixos de tempo, días, anos... e establecen ecuacións en diferenzas que relacionan as cantidades observadas en períodos diferentes.

Xa que logo, é necesario que aprendas a establecer este tipo de relacións e convertelas nunha ecuación en diferenzas para que poidas estudar fenómenos dinámicos discretos. Ademais, unha vez que saibas distinguir e definir estas ecuacións, debes aprender a resolver polo menos as máis sinxelas e a analizar e interpretar os resultados obtidos.

Dado que xa estamos a piques de rematar o programa e pretendemos unicamente iniciarte no estudo dos modelos dinámicos, o que aprendas nesta lección non o aplicarás directamente nesta materia.

2.- Epígrafes do tema:

- Definición de ecuación en diferenzas. Conceptos básicos e exemplos.
- Solución: existencia e unicidade.
- A ecuación en diferenzas lineal de orde 1 con coeficientes constantes.
- Aplicacións económicas.
- Equilibrio e estabilidade da solución.
- O modelo da arañeira.
- Espazo de fases.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 8, pax. 289–323). Tamén é interesante que consultes os capítulos 2 e 3 do libro de González, C. e Barrios, J.A., xa que nel atoparás múltiples exemplos que che axudarán a entender mellor o tema.

4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que ter claros o significado e a formulación dunha ecuación en diferenzas, saber calcular a solución das lineais e analizar se está en equilibrio e a estabilidade do mesmo.

TEMA 13: ECUACIONES DIFERENCIAIS

1.- Sentido do tema dentro do programa: Este é o último tema do programa. Nel preténdese que agora que xa tes as nocións básicas para traballar con modelo dinámicos en tempo discreto, poidas facer o mesmo cando se considera o tempo como unha variable continua. Para iso intentaremos que aprendas o mínimo (pois non hai tempo para afondar máis) para manexarte coas ecuacións diferenciais.

2.- Epígrafes do tema:

- Definición, conceptos básicos e exemplos.
- Interpretación xeométrica.
- Problema de Cauchy. Existencia e unicidade da solución.
- Ecuacións lineais de primeira orde cun coeficiente variable.
- Aplicacións económicas.

3.- Materiais para traballar o tema:

O material do curso virtual. Tamén debes consultar o texto base (capítulo 7, pax. 243–288). Tamén che pode axudar a consulta dos capítulos 9 e 10 do libro de Balbás, A., Gil, J. A. e Gutiérrez, S.

4.- Contidos esenciais:

Cando remates o estudo desta lección tes que estar en condicións de formular un problema en termos de ecuacións diferenciais sinxelas e ser capaz de resolvelo e de interpretar os resultados obtidos.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Como xa viches anteriormente, en cada bloque do programa indicáronseche os textos que necesitarás para preparar as leccións correspondentes. Estes xunto co material que terás ó teu dispor no curso virtual seranche imprescindibles para traballar a materia.

Xa tes, polo tanto, sete manuais que che axudarán a completar os teus apuntes e nos que podes atopar moitos exercicios resoltos. Se acaso nalgún momento non dispós deles, tamén che poden servir os seguintes:

- **Arya, Lerner;** Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Ed. Prentice-Hall.
- **Balbás, A., Gil, J. A., Gutiérrez, S. (1988)** *Análisis Matemático para la Economía II*. Editorial A.C.
- **Borrell, J., (1990)** *Métodos matemáticos para la economía*. Ed. Pirámide.
- **Caballero, R.. e outros (1993).** *Métodos matemáticos para la Economía*. Ed. McGraw-Hill.
- **Camacho, E. e outros (2005).** *Fundamentos de Cálculo para Economía y Empresa*. Ed. Delta.
- **Chiang, A.C. (1987).** *Métodos fundamentales de Economía matemática*. Ed. McGraw-Hill.
- **Gandolfo, G. (1976)** *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*. Ed. Tecnos.
- **Guerrero Casas, F. M. (1994).** *Curso de optimización: Programación matemática*. Ed. Ariel.
- **Intrilligator, M. (1973)** *Optimización matemática y teoría económica*. Ed. Prentice Hall.
- **López Cachero, M. (1994).** *Curso básico de matemáticas para la economía y dirección de empresas II. Ejercicios*. Ed. Pirámide.

INDICACIONES PARA O ESTUDO DAS LECCIONES

Dado que a profesora explicará na aula os aspectos teóricos mais relevantes de cada tema, é moi importante que sigas atentamente as explicacións e preguntas o que non entendes. Así e todo isto non abonda para asimilar os conceptos, polo que che suxiro o seguinte método de traballo:

- Despois de cada clase e antes da seguinte volve a ler as túas notas e aproveita para completalas coa axuda do texto base recomendado.
- Para fixar ben os conceptos é importante que te axudes con exemplos sinxelos. Algúns faranse na aula pero debes buscar outros e razoalos pola túa conta. Deste xeito, cando o consigas estarás seguro de que comprendes os resultados cos que estás a traballar. Para isto terás listas de problemas clasificados segundo a súa dificultade: baixa, media e alta. Tamén tes nos textos recomendados moitos problemas tanto resoltos como propostos.
- Cando resolvas sen dificultade os exercicios mais sinxelos, xa deberías comprender os conceptos e resultados mais importantes. Podes pasar a traballar os de maior dificultade.
- Recorda que en todo este proceso podes resolver as dificultades que se che presenten tanto na aula como nas titorías e seminarios.

6- INDICACIONES METODOLÓGICAS

6.1 LÍNEAS XERAIS DE TRABALLO

A materia consta de 9 créditos distribuídos aproximadamente en 30 horas de clases teóricas e en 60 de clases prácticas (resolución de exercicios na aula e no ordenador, exposicións de traballos de grupo e seminarios ou titorías de aula). A explicación de cada tema do programa por parte da profesora irá precedida dunha presentación-esquema e dos obxectivos que se pretenden conseguir.

As tres horas de aulas correspondentes a cada semana do curso impartiranse nunha sesión de dúas horas e noutra dunha hora. Na sesión de dúas horas, a primeira dedicárase á exposición teórica por parte da profesora e a segunda á resolución de exercicios e exposicións dos traballos de grupo; na sesión dunha hora faremos exercicios na aula de informática cada 15 días e os días restantes serán para seminarios. Estes últimos organizaranse segundo as necesidades dos alumnos que se dividirán en grupos máis pequenos. Así aqueles que teñan máis dificultades na comprensión dos conceptos teóricos ou na resolución de problemas, aproveitarán para insistir nos mesmos e clarexar as dúbidas que teñan. Haberá outro grupo para os alumnos que tendo claros os conceptos básicos e sabendo resolver os exercicios de dificultade baixa e media, pretendan profundar máis na materia mediante a resolución de exercicios de dificultade máis alta e facendo algunhas demostracións teóricas dos teoremas empregados para resolvelos.

Haberá un curso virtual da materia no que o alumno atopará a presente guía, apuntes desenvolvidos de cada tema, enlaces a páxinas matemáticas, información acerca de actividades voluntarias complementarias relacionadas coa materia, exercicios de autoavaliación, probas para a avaliación por parte das profesoras, titorías virtuais e caixa de comentarios e suxestións así como correo electrónico e foros de debate públicos (para todo o grupo) e privados (para cada grupo de traballo).

A docencia da materia impartirase en réxime de avaliación continua e levarase a cabo, dentro do rigor posible en formulacións e en procesos dedutivos propios da matemática, a través das seguintes actividades:

- Clases teóricas participativas.
- Resolución de exercicios na aula por parte dos alumnos e da profesora.

-
- Exercicios realizados fóra da aula tanto en grupo como individualmente.
 - Preguntas realizadas pola profesora ao chou para manter a atención do estudante e ter o control do nivel de seguimento da explicación ou do problema.
 - Traballo no curso virtual.

Para lograr os obxectivos formulados dentro das competencias transversais e persoais procederemos como segue:

- Para organizar o traballo en equipo formaranse grupos de 3 estudantes que unha vez cada cuadrimestre terán que preparar e expoñer na aula unha aplicación económica do instrumento matemático proposto pola profesora.
- Para promover a participación e a comunicación na aula a profesora fará preguntas individuais durante o desenvolvemento das clases e propondrá cuestións que se resolverán entre todos.

Todo o anterior, xunto coas explicacións teóricas dos contidos básicos, axudará á consecución dos coñecementos específicos. O alumno terá á súa disposición todo o material da materia no curso virtual.

O desenvolvemento da materia farase de xeito que os alumnos poidan optar por unha preparación necesaria e mínima (apoio en seminarios con repaso e repetición de conceptos e resolución de mais exercicios) ou por preparar a materia con máis profundidade (apoio en seminarios nos que se farán demostracións de resultados que non se fixeron na clase e que afonden máis no tema obxecto de estudio). Tamén haberá as habituais titorías individuais para a solución de dúbidas e de dificultades particulares.

Poderase superar a materia sen saber facer demostracións, dominando as técnicas correspondentes a cada tema, entregando os exercicios que se soliciten ou ben obter as cualificacións máis altas preparando o material e os exercicios que se recomenden para este fin.

6.2 QUE TES QUE FACER NA AULA?

- É moi importante que atendas ás explicacións teóricas e que se non entendes algo o preguntes. Como podes ver no desenvolvemento do temario, moitos dos temas precisan dos coñecementos adquiridos nos anteriores. Se non comprendiches ven os conceptos destes, terás dificultades para seguir o programa. Non se poden

deixar dúbidas pendentes.

- Na parte mais práctica da materia, terás que resolver os exercicios que se propoñan na aula e saír a explicalos cando a profesora o considere oportuno.
- Como xa se indicou anteriormente, haberá clases na aula de informática. Aínda que o programa que se emprega é moi específico e se explicará o seu manexo nas clases, é importante que teñas algúns coñecementos básicos do manexo do ordenador.
- Xa sabes que haberá titorías ou seminarios na aula periodicamente. Algúns destes seminarios serán de reforzo para aqueles que o precisen á vista dos seus resultados. Se é o teu caso e por indicación da profesora, deberás asistir. Se obtés bos resultados no conxunto de traballos obrigatorios e queres profundar na materia para obter unha cualificación mais alta, podes asistir aos seminarios correspondentes. Estes serán voluntarios.

6.3 QUE TES QUE FACER FÓRA DA AULA?

- Ao principio do curso terás que darte de alta como usuario da aula virtual para poder acceder ao curso da materia e tamén tes que ter o nome de usuario e a contrasinal necesarias para poder usar os ordenadores das aulas de informática. Se non sabes como facelo pregúntalle á profesora.
- Como xa se comentou anteriormente, os coñecementos previos en moitos casos son imprescindibles para poder seguir as clases. Por isto é importante que antes dunha clase teñas repasado pola túa conta os conceptos que se traballaron na anterior. Se ves que che quedan dúbidas tes que consultalas coa profesora nas horas de titorías. Non acumules dúbidas pois ao final o único que conseguirás é non entender nada e ter moitas dificultades para superar a materia. Se a levas ao día verás que che resulta moito mais fácil.
- Ademais, terás que resolver os exercicios que se propoñan e realizar o correspondente traballo no curso virtual e algún traballo en grupo que deberás presentar nas datas que se che indiquen.

7 - CARGA DOCENTE EN CRÉDITOS ECTS

Esta materia é na actualidade de 9 créditos LRU. Se supoñemos que son 9 ECTS, isto veñen sendo unhas 225 horas de traballo do alumno que se distribuirán segundo se indica na seguinte táboa:

Actividade	Horas presenciais	Horas de traballo autónomo	Total (por actividade)
Clases teóricas	30	25	55
Clases prácticas	15	30	45
Clases con ordenador	15		15
Seminarios	15		15
Traballo no curso virtual		25	25
Traballos en grupo	15	15	30
Titorías	10		10
Exames	5	25	30
TOTAL HORAS	105	120	225

Esta materia require unhas 120 horas de traballo autónomo do alumno, ademais das horas de asistencia ás aulas tanto teóricas como prácticas e das titorías e exames. A estimación deste tempo medio de traballo autónomo é orientativa e virá modificada fundamentalmente pola atención e pola participación nas actividades da aula e nas complementarias, pola base en matemáticas de cada un e pola facilidade para o razoamento lóxico e abstracto.

8 - AVALIACIÓN

Nesta materia realizarase **avaliación continua**: as probas escritas realizaranse **sen previo aviso** durante o horario de clases prácticas. Enténdese que os alumnos teñen que traballar regularmente a materia xa que é imprescindible que teñan estudadas e comprendidas as leccións anteriores para poder seguir as explicacións. A cualificación obtida nestas probas representará o 40% da cualificación final. Os aspectos que se terán en conta para cualificar así como o seu peso na nota final serán os que figuran no seguinte cadro:

Aspecto	Criterio	Peso
Probas escritas	Coñecementos demostrados da materia	50% (*)
Participación	Participación activa na aula	5%
Proba na aula de informática	Coñecementos demostrados da materia e do programa Maple	10%
Exercicios para resolver	Coñecementos demostrados da materia	25%
Cuestionarios no curso virtual	Número de respostas correctas	10%

(*) Se non se obteñen alomenos 2 dos 5 puntos nas probas escritas de cada bloque temático, será preciso examinarse desá parte ao final do curso.

Os estudantes que non acaden a cualificación de 5 puntos na avaliación continua deberán presentarse ao exame final da materia.