

Poder refractor de la lente cristalino con gradiente de índice del ojo humano

Refractive power of the GRIN crystalline lens of the human eye

M.A. Rama, M Victoria Pérez, Carmen Bao, M.T. Flores-Arias y Carlos Gómez-Reino

Grupo de Óptica GRIN, Departamento de Física Aplicada, Facultad de Física y Escuela de Óptica y Optometría, Universidad de Santiago de Compostela, facgrc@uscmail.es, Campus Sur, Universidade de Santiago de Compostela. 15782 Santiago de Compostela. España

RESUMEN:

Se calcula la potencia refractora del cristalino del ojo humano en función de la posición y la pendiente del rayo de campo en el contexto del modelo bielíptico asimétrico de gradiente de índice (GRIN). Se muestra, asimismo, la dependencia de la potencia con el espesor y el radio ecuatorial del cristalino.

Palabras clave: Cristalino, óptica GRIN

ABSTRACT:

In the framework of the asymmetric bi-elliptical continuous GRIN model of the crystalline lens of the human eye, back refractive and vertex powers have been determined. The dependence of the power on the position and slope of the field ray at the edge of the lens, as well as the dependence on thickness and equatorial radius of the crystalline lens have been shown.

Key words: Crystalline lens, GRIN optics

REFERENCIAS Y ENLACES.

- [1] T. Raasch y V. Lakshminarayanan, "Optical matrices of lenticular polyindicial schematic eyes", *Ophthalm. Physiol. Opt.* **9**, 61-65 (1989).
- [2] G. Smith, B. K. Pierscionek y D. A. Atchison, "The optical modelling of the human lens", *Ophthalm. Physiol. Opt.* **11**, 359-369 (1991).
- [3] D. A. Atchison y G. Smith, "Continuous gradient index and shell models of the human lens", *Vision Res.* **35**, 2529-2538 (1995).
- [4] M. V. Pérez, C. Bao, M. T. Flores-Arias, M. A. Rama y C. Gómez-Reino, "Gradient parameter and axial and field rays in the gradient-index crystalline lens model", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5**, S293-S297 (2003).

[5] R. K. Luneburg, *Mathematical theory of optics*, University Press, Berkeley (1964)

[6] C. Gómez-Reino, "GRIN optics and its application in optical connections", *Int. J. Optoelectron.* **7**, 607-680 (1992).

1.- Introducción.

El índice de refracción del cristalino del ojo humano no es constante y se utilizan para su descripción dos modelos básicos, el de capas y el continuo. En el modelo de capas el perfil de índice de refracción se representa por un número finito y discreto de capas concéntricas, con índice de refracción constante en cada una de ellas^[1].

En el modelo continuo de gradiente de índice (GRIN) el perfil del índice de refracción se representa por superficies de igual índice^[2-3]. En este trabajo se utiliza un modelo continuo (GRIN) del cristalino que representa el perfil del índice de refracción mediante superficies elípticas de igual índice, concéntricas con las superficies que delimitan el cristalino, cuya curvatura posterior es mayor que la anterior (elipsoides asimétricos) de tal modo que en el plano ecuatorial de unión dichas superficies son suaves y continuas. En el contexto de este modelo, hemos estudiado las potencias refractora y de vértice del cristalino GRIN.

2.- Propagación en el cristalino GRIN.

El perfil del índice de refracción en cualquier punto de la región sagital de la lente, YZ, según el modelo bielíptico asimétrico, se puede describir como una serie de potencias

$$n(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j f^j(y, z) \quad (1)$$

siendo c_j los coeficientes del desarrollo y

$$f(y, z) = \frac{(z - a_1)^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (2)$$

para la parte anterior de la lente y

$$f(y, z) = \frac{(z - a_2)^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (3)$$

para la parte posterior de la lente.

El espesor de la lente a lo largo del eje Z es $d = a_1 + a_2$, b es el semieje común a las elipses a lo largo del eje Y y a_1 y a_2 son los semiejes a lo largo del eje Z para las curvas de igual índice de tipo bielíptico asimétrico (Fig. 1). Asimismo, las funciones $f(x, y)$ toman valor unidad en la superficie externa de dichas curvas.

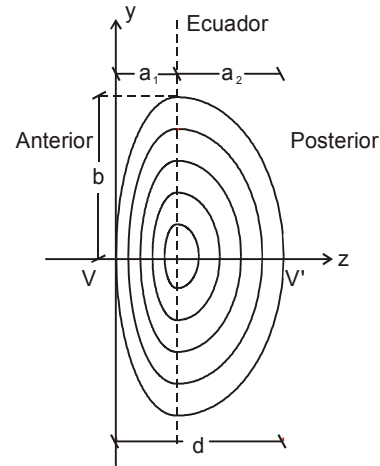


Figura 1. Distribución del índice de refracción del cristalino en la sección sagital representada mediante curvas bielípticas unidas en el ecuador.

De las ecuaciones (1-3), se obtienen las siguientes condiciones

$$n_c = c_0 \quad (4)$$

$$n_e = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \quad (5)$$

donde n_c es el valor central del índice y n_e es el valor del índice en los extremos.

La diferencia en el índice de refracción entre el centro y el extremo de la lente es, por tanto

$$\Delta n = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \quad (6)$$

En el dominio paraxial se puede escribir la ecuación que representa el perfil del índice como^[4]

$$n(y, z) = n_0(z) \left[1 - \frac{g^2(z)}{2} y^2 \right] \quad (7)$$

donde $n_0(z)$ es el índice a lo largo del eje óptico Z y $g(z)$ es el parámetro de gradiente, que caracteriza la distribución del índice de refracción. Hemos tenido en cuenta sólo el término de segundo orden en y para el índice de refracción ya que estamos interesados en la propagación de la luz en zona paraxial.

El parámetro de gradiente para las partes anterior y posterior del cristalino viene dado por

$$g_f^2(z) = -\frac{\sum_{j=1}^{\infty} 2jc_j \left[\frac{z-a_1}{a_1} \right]^{2(j-1)}}{b^2 n_{0f}(z)} \quad (8)$$

$$g_b^2(z) = -\frac{\sum_{j=1}^{\infty} 2jc_j \left[\frac{z-a_1}{a_2} \right]^{2(j-1)}}{b^2 n_{0b}(z)} \quad (9)$$

siendo

$$n_{0f}(z) = n_f(y, z)|_{y=0} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\frac{z-a_1}{a_1} \right)^{2j} \quad (10)$$

$$n_{0b}(z) = n_b(y, z)|_{y=0} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\frac{z-a_1}{a_2} \right)^{2j} \quad (11)$$

donde los subíndices f y b hacen referencia a las partes anterior y posterior del cristalino, respectivamente.

En particular, los valores del parámetro de gradiente en el centro y en los extremos de la lente a lo largo del eje, vienen dadas por

$$g_c^2 = g_f^2(a_1) = g_b^2(a_1) = -\frac{2c_1}{n_e b^2} \quad (12)$$

$$g_e^2 = g_f^2(0) = g_b^2(d) = -\frac{2 \sum_{j=1}^{\infty} jc_j}{b^2 n_e} \quad (13)$$

donde se han utilizado las ecuaciones (4) y (5).

En el dominio paraxial, la propagación de luz en un medio GRIN se puede estudiar utilizando el rayo axial y el rayo de campo, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación paraxial de rayos. Cualquier otro rayo paraxial se puede expresar como combinación lineal de ambos rayos^[5].

Para el cálculo de las expresiones de los rayos axial y de campo, se ha de tener en cuenta la condición de débil inhomogeneidad^[4],

$$\frac{|\dot{g}(z)|}{g^2(z)} \ll 1 \quad (14)$$

que expresa el hecho de que $g(z)$ varía muy lentamente en distancias del orden de la longitud de onda.

En particular, las expresiones de las posiciones y de las pendientes de los rayos axial y de campo en los extremos del cristalino son las siguientes^[4]

$$H_{ab}(d) = d \cdot \left(1 - \frac{g_e^2 \cdot d^2}{6} \right) \quad (15)$$

$$H_{fb}(d) = 1 - \frac{g_e^2 \cdot d^2}{2} + \frac{\dot{g}_e}{2g_e} \cdot H_{ab}(d) \quad (16)$$

$$\dot{H}_{ab}(d) = 1 - \frac{g_e^2 \cdot d^2}{2} - \frac{\dot{g}_e}{2g_e} \cdot H_{ab}(d) \quad (17)$$

$$\dot{H}_{fb}(d) = -\left(g_e^2 + \left(\frac{\dot{g}_e}{2g_e} \right)^2 \right) \cdot H_{ab}(d) \quad (18)$$

donde el punto indica la derivada con respecto a z y los subíndices ab y fb hacen referencia a los valores que toman el rayo axial y de campo sobre la cara posterior del cristalino.

La relación entre la pendiente del parámetro de gradiente de índice y dicho parámetro, sobre la cara posterior, viene dada por

$$\frac{\dot{g}_e}{2g_e} = \frac{n_e \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j - \left[\sum_{j=1}^{\infty} jc_j \right]^2}{2dn_e \sum_{j=1}^{\infty} jc_j} \quad (19)$$

3.- Potencia del cristalino del ojo humano.

La potencia del cristalino humano depende del radio de curvatura de las superficies anterior y posterior, de la diferencia de índice en las superficies de separación cristalino-humor acuoso y cristalino-humor vítreo y de la variación del índice de refracción dentro del cristalino. Si nos ceñimos a la naturaleza GRIN del cristalino, e ignoramos la refracción en las superficies anterior y posterior, podemos considerar el cristalino como una lente GRIN de caras plano-paralelas y espesor d (Figura 2).

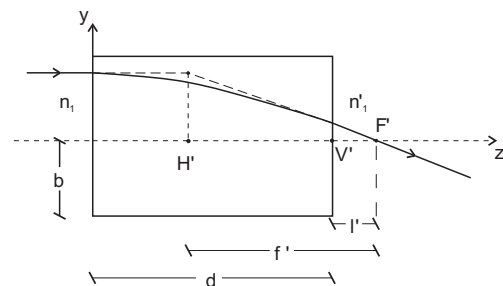


Figura2. El cristalino como una lente GRIN con caras plano-paralelas y espesor d .

La potencia refractora se expresa como^[6]

$$P_G' = \frac{n_1'}{f'} \quad (20)$$

y la potencia de vértice correspondiente se escribe como

$$P_{V'}' = \frac{n_1'}{l'} \quad (21)$$

donde n_1' es el índice de refracción del humor vítreo y f' y l' son las distancias focal y de trabajo en el espacio imagen, respectivamente, dadas por

$$f' = H' F' = -\frac{n_1'}{n_e \dot{H}_{fb}(d)} \quad (22)$$

$$l' = V' F' = -\frac{n_1' H_{fb}(d)}{n_e \dot{H}_{fb}(d)} = f' H_{fb}(d) \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (22) y (23) en las ecuaciones (20) y (21) se obtiene

$$P'_G = -n_e \cdot \dot{H}_{fb}(d) \quad (24)$$

$$P'_{V'} = -n_e \frac{\dot{H}_{fb}(d)}{H_{fb}(d)} = \frac{P'_G}{H_{fb}(d)} \quad (25)$$

De las ecuaciones (24) y (25) se sigue que P'_G y $P'_{V'}$ dependen del valor del índice de refracción en la cara posterior del cristalino y de la posición y pendiente del rayo de campo sobre esta cara.

4.- Resultados.

Con el objetivo de analizar el comportamiento paraxial del cristalino teniendo en cuenta su naturaleza GRIN, hemos considerado el cristalino con un perfil de índice de refracción transversal parabólico en la sección sagital, modulado por un índice de refracción longitudinal a lo largo del eje óptico que contiene hasta términos de sexto orden en z . Los valores $n_c = 1.406$ y $n_e = 1.386$ se tomaron del modelo de ojo esquemático de Gullstrand. Los coeficientes de la serie de potencias en el perfil de índice se pueden obtener a partir de las ecuaciones (4) y (5) teniendo en cuenta la condición de débil inhomogeneidad (14).

En la figura 3 se representa la potencia refractora frente al espesor. En esta gráfica se muestra un crecimiento lineal de dicha potencia con el espesor para los diferentes órdenes en la serie de potencias. Se puede observar, asimismo, que el mayor valor corresponde al perfil axial de índice de refracción de orden 2, tomando los órdenes 4 y 6 prácticamente el mismo valor.

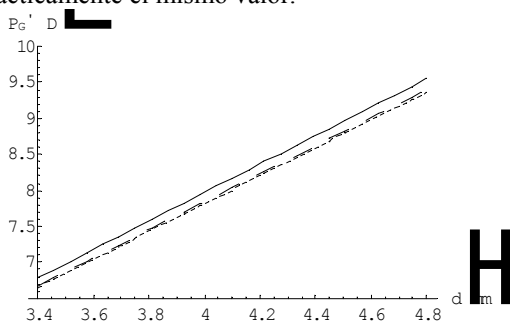


Fig. 3. Potencia refractora frente al espesor. Los cálculos se han hecho para $b=4.5$ mm, $a_1=1.7$, $a_2=1.9$, $c_0=1.406$ y $c_1=-0.02$ (línea continua); $c_1=-0.0201$ y $c_2=0.0001$ (línea discontinua fina); y $c_1=-0.0201416$, $c_2=0.0001423$ y $c_3=-0.0000007$ (línea discontinua gruesa).

La potencia de vértice se muestra en la figura 4. Presenta un comportamiento similar al de la figura 3, ambas potencias presentan una variación en el valor de aproximadamente 3D entre 3.4 y 4.8 mm de espesor. Por otra parte, se aprecia que los valores de

la potencia de vértice obtenidos son prácticamente iguales a los de la potencia refractora.

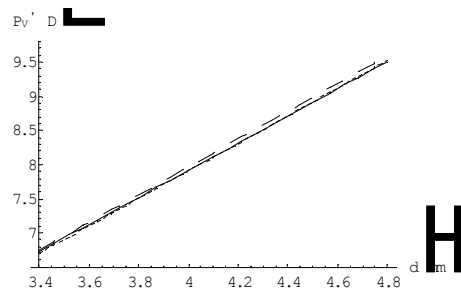


Fig. 4. Potencia de vértice frente al espesor. Se han utilizado para la representación los valores de la fig. 3.

Las figuras 5 y 6 representan las potencias frente al radio ecuatorial del cristalino, respectivamente, para un espesor de 3.6 mm y diferentes órdenes en el índice de refracción a lo largo del eje. En ambas figuras, se observa un decrecimiento de aproximadamente 3D con b , al contrario de lo que ocurre con el espesor. La potencia refractora es mayor para orden 2 que para 4 y 6, presentando casi el mismo comportamiento para los órdenes menores del índice de refracción a lo largo del eje óptico. Sin embargo, para la potencia de vértice se aprecia una igualdad en los valores para todos los órdenes considerados del perfil de índice de refracción.

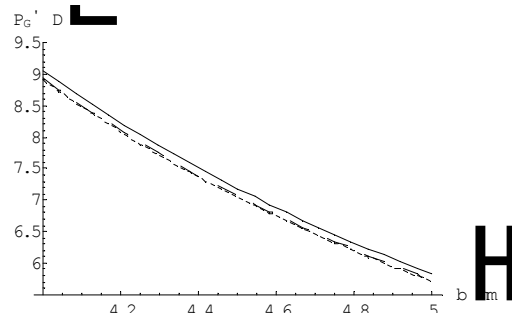


Fig. 5. Potencia refractora frente al radio ecuatorial. Representación hecha para $d=3.6$ mm. Los demás valores igual que en la fig. 3.

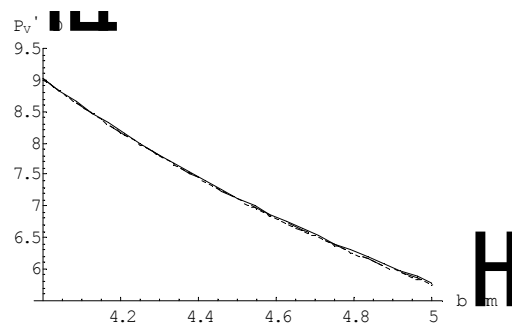


Fig. 6. Potencia de vértice frente al radio ecuatorial. Mismos valores que en la figura 5.

En las figuras 3 y 5 la diferencia entre los valores de la potencia refractora, para un valor dado de d o b es muy pequeña. Esta diferencia en el caso de la potencia de vértice es despreciable.

Conclusión.

El objetivo de este trabajo ha sido presentar un modelo de lente GRIN para el cristalino del ojo humano y aplicar este modelo al cálculo del poder refractor y de vértice. El modelo considera que el índice de refracción del cristalino se puede representar, en zona paraxial, mediante superficies bielípticas asimétricas de igual índice.

Mediante este modelo se ha analizado la influencia que tiene el espesor y el radio ecuatorial del cristalino sobre la potencia, que tiene especial relevancia en los procesos de envejecimiento y de acomodación del cristalino.

Agradecimientos.

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto ESGHOPET/TIC 2003-03041 del MCyT.