

Estudio de las condiciones de absorción en las ecuaciones integradas de Boussinesq

Proyecto de Máster. Curso 2011-12. Máster Oficial en Ingeniería Matemática

Autora: Paula M. López Pérez

Tutor: Andrés Prieto Aneiros

RESÚMEN

La simulación numérica de la propagación de ondas en el océano con un modelo tridimensional es inabordable debido al enorme tamaño del problema. Habitualmente, para reducir su coste computacional, el modelo tridimensional se aproxima (bajo la suposición de aguas someras) por las ecuaciones extendidas de Boussinesq.

El interés de la simulación numérica suele centrarse en una región acotada de la costa, por lo que se hace necesario encontrar técnicas precisas para truncar un dominio computacional de gran tamaño y reducirlo a uno mucho más pequeño sin perturbar la solución del problema original y sin introducir reflexiones espúreas. Una de las familias de técnicas que pueden ser usadas para truncar el dominio computacional utiliza el concepto de condiciones de frontera absorbentes.

Consideramos un modelo simplificado de las ecuaciones extendidas de Boussinesq que conserva las mismas dificultades teóricas y numéricas (ambas ecuaciones son no lineales y de orden tres): la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV),

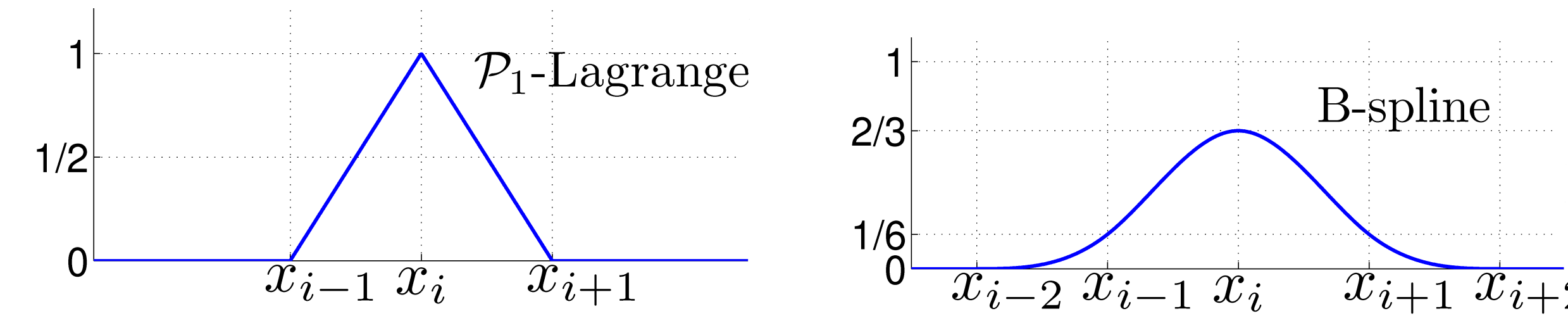
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

y la ecuación RLW (Regularized Long Wave),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0,$$

siendo u la componente horizontal de la velocidad a profundidad fija, g la aceleración debida a la gravedad y h_0 la profundidad promedio.

Para resolver numéricamente estas ecuaciones se utiliza una discretización Petrov-Galerkin de elementos finitos en espacio, en la que las funciones de forma para las funciones test y para la solución del problema son distintas. En concreto, se discretiza la solución con funciones Lagrange $\mathbb{P}_1$ y la función test con B-splines cúbicos.



En la discretización en tiempo se utilizará un esquema predictor-corrector de tipo Adams-Bashforth-Moulton.

Tras revisar las condiciones absorbentes existentes en la bibliografía, se estudia la relación que existe entre las capas absorbentes o esponjas numéricas del tipo Wei-Kirby [1] y la técnica de capas perfectamente acopladas (PML) [2], encontrándose que bajo ciertas hipótesis, y suponiendo un comportamiento lineal del problema unidimensional, una capa PML podría considerarse un caso particular de la esponja numérica del tipo Wei-Kirby.

RESULTADOS

El Instituto de Hidráulica de Cantabria proporciona el programa “Modelo Avanzado No Lineal de Ondas”, donde está implementado el modelo de propagación de ondas basado en las ecuaciones de Boussinesq unidimensionales y la discretización espacio-temporal mencionada antes. Uno de los objetivos de este trabajo es la implementación tanto de las capas absorbentes como de las capas perfectamente acopladas, suponiendo para ello un comportamiento lineal del problema unidimensional que involucra una capa PML.

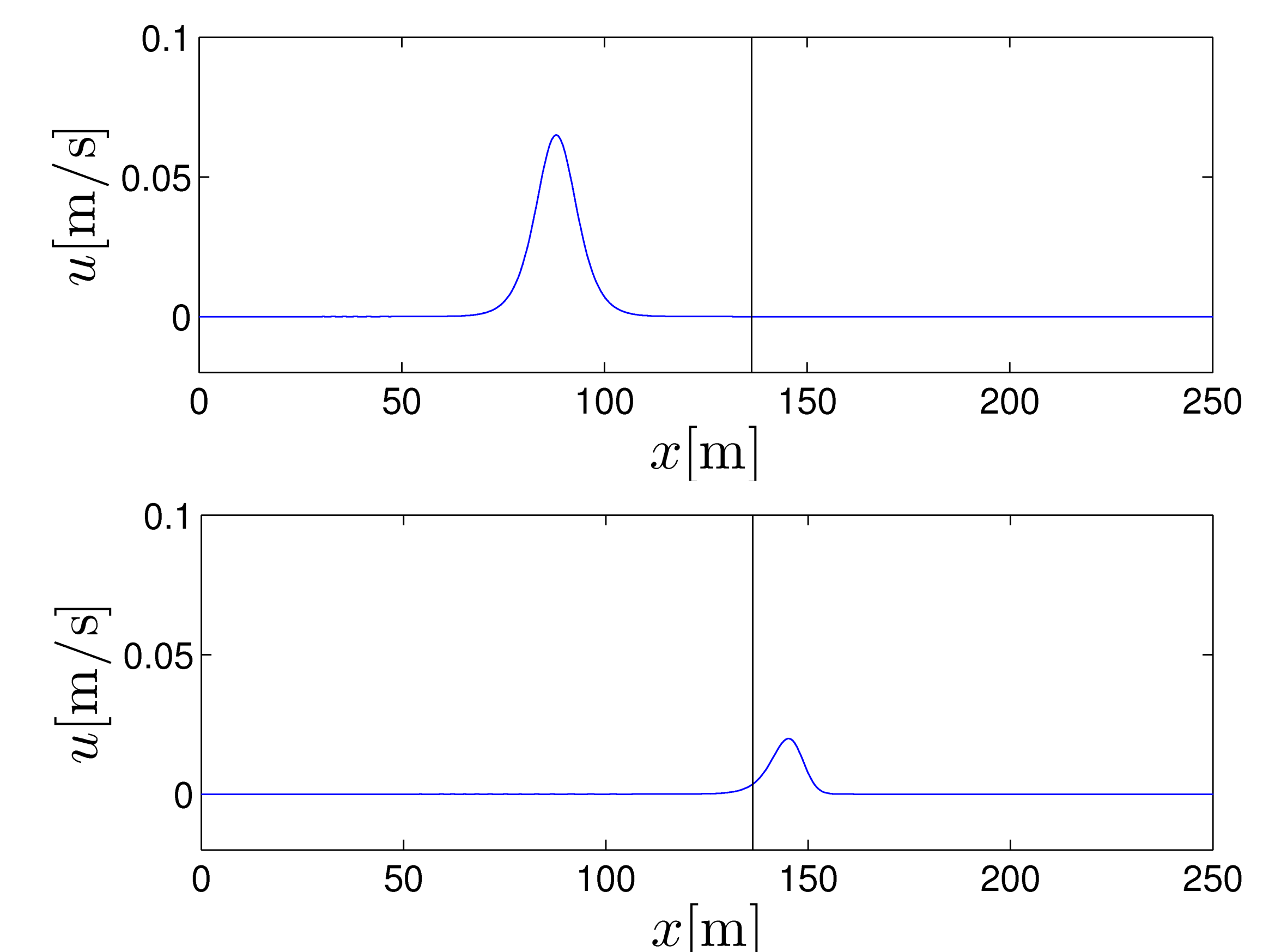
Si consideramos como onda incidente un solitón de soporte compacto que viaja a una velocidad finita obtenemos la siguiente tabla, que muestra los errores relativos obtenidos con una capa PML cuya función de absorción asociada es

$$\sigma(x) = A \left(\frac{x - x_N}{E} \right),$$

siendo A el parámetro de absorción, E el espesor (en función de la longitud de onda λ) de la capa PML y x_N la posición de la interfaz entre el dominio físico y la capa PML.

	$E = 2,51\lambda$	$E = 2,01\lambda$	$E = 1,51\lambda$	$E = 1,01\lambda$
$A = 10$	3,49 e-05	6,21 e-04	1,31 e-03	1,42 e-03
$A = 1$	2,95 e-04	3,40 e-04	8,01 e-04	9,95 e-04
$A = 0,1$	1,54 e-04	5,25 e-04	3,98 e-04	5,21 e-04
$A = 0,05$	1,22 e-04	5,04 e-04	3,18 e-04	1,12 e-03

En las dos siguientes gráficas se muestra la velocidad horizontal en dos instantes de tiempo diferentes: cuando el soporte del solitón está contenido en el dominio físico (gráfica superior) y el instante en que el solitón ha sobrepasado la interfaz entre el dominio físico y la capa PML (gráfica inferior). Se observa que cuando el solitón penetra en la capa PML, disminuye su amplitud sin producir reflexiones significativas.



REFERENCIAS

- [1] Wei, G., and Kirby, J.T.: Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg. 121(5), vol. 121, 251–261, 1995
- [2] Bermúdez A., Hervella-Nieto L., Prieto A., Rodríguez R.: An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems, J. Comput. Phys. 223(2), 469-488, 2007