“An Introduction to Continuum Mechanics” de M. E. Gurtin. Ejercicios resueltos (capítulos I–VI)

Óscar López Pouso

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Santiago de Compostela

Índice general

Introducción

La Mecánica de Medios Continuos ha entrado a formar parte de los planes de estudios en las Facultades de Matemáticas españolas en los últimos años, generalmente como parte de la formación optativa de segundo ciclo, situación que se da en la Universidad de Santiago de Compostela y en la Universidad Complutense de Madrid. En nuestra opinión, el alumno fortalece su dominio de la asignatura, entre otras cosas, mediante la resolución de ejercicios; esa convicción es la que nos ha llevado a redactar la presente obra.

Esta recopilación de soluciones, más que de problemas, es el resultado de dos años de docencia en la asignatura "Modelos Matemáticos da Física I" (llamada actualmente "Métodos Matemáticos da Mecánica do Continuo"), durante los cursos 1997–98 y 1998–99, a los alumnos de cuarto curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela. Se han resuelto los ejercicios que propone M. E. Gurtin en los capítulos que van del I al VI (secciones de la 1 a la 19) de su libro [(1981) *An Introduction to Continuum Mechanics.* New York. Academic Press], y se han añadido algunos más, complementarios a los primeros, que tienen que ver sobre todo con el manejo de los operadores diferenciales y de los tensores utilizando coordenadas.

Se cubren los temas iniciales de un curso de Mecánica de Medios Continuos, como son el álgebra y el análisis tensorial, el concepto de deformación, de movimiento y de fuerza, y las leyes de conservación de la masa y de los momentos. El último capítulo sirve como ejemplo en el cual se utilizan los primeros temas y se aplican tanto a los fluidos ideales como a los fluidos elásticos. Entre los ejercicios se encuentra la demostración de algún resultado conocido de gran importancia, como la *desigualdad de Korn* y los teoremas de *Da Silva*, de *Kelvin* y de *Signorini*, entre otros.

Para usar este libro, ténganse en cuenta los siguientes comentarios:

- Ejercicio 1.7 quiere decir ejercicio 7 de la sección 1. Para referirnos a un ejercicio de una misma sección usamos solamente el número del ejercicio.

- Como regla general: negritas minúsculas denotan vectores; negritas mayúsculas tensores.

- Como en el libro de Gurtin, "regular" (*smooth*) quiere decir de clase C^1.

- La única diferencia en cuanto a los métodos de resolución de los ejercicios, es que nosotros usamos (no siempre) las expresiones de los operadores diferenciales en coordenadas, mientras que Gurtin prefiere la definición intrínseca.

- Alguno de los ejercicios (muy pocos) solamente se enuncia, porque su resolución es inmediata. Este es el caso de algún ejercicio de la sección 1.
- Se cambian algunos enunciados, bien porque el ejercicio puede generalizarse, bien porque se ha detectado alguna errata en el original.

y las siguientes notaciones:

- $\mathcal{E}$ es $\mathbb{R}^3$ como conjunto de puntos.
- $\mathcal{V}$ es $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial con el producto escalar euclidiano.
- $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}$.
- v_i es la componente i del vector $\mathbf{v}$; S_{ij} la componente ij del tensor $\mathbf{S}$.
- $\mathrm{diag}(a, b, c)$ es una matriz diagonal con diagonal (a, b, c).
- Hay dos diferencias importantes entre nuestra notación y la del libro de Gurtin: la primera es que, si φ es una función de $\mathbf{x}$, nosotros usamos la notación $\varphi_{,i}$ para la derivada parcial de φ con respecto a x_i, y, análogamente, $\varphi_{,ij} = \partial^2\varphi/(\partial x_i \partial x_j)$; la segunda es que nosotros usamos, salvo mención explícita en sentido contrario, el convenio de Einstein de índices repetidos, y así, por ejemplo, $a_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 a_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{S} = S_{ii}(= \sum_{i=1}^3 S_{ii})$, y $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = v_{i,i}(= \sum_{i=1}^3 v_{i,i})$. Sin embargo, en $a_i + b_i$ no hay suma implícita.

La intervención del lector es hoy más posible que nunca gracias a la www, y esta intervención puede ser de gran ayuda en la localización de erratas. Los comentarios acerca del contenido de este libro pueden dirigirse a la dirección electrónica `oscarlp@usc.es`.

Agradezco al profesor Alfredo Bermúdez de Castro la ayuda prestada siempre que fue requerido para ello. Su atención y también las simplificaciones de ciertas soluciones y los nuevos puntos de vista aportados por la profesora María Elena Vázquez Cendón y por los alumnos se han traducido en una mejora de las notas originales. Debo también expresar mi agradecimiento a Academic Press ("a Harcourt Science and Technology Company"), que amablemente me ha dado permiso para reproducir, traducidos al castellano, los enunciados del libro escrito por el profesor Morton E. Gurtin. Por último, deseo hacer constar el ánimo que me ha transmitido el propio profesor Gurtin, con quien he mantenido una breve correspondencia electrónica. Cualquier error es exclusiva responsabilidad del autor.

Santiago de Compostela, 15 de febrero de 2002.

Acerca de esta segunda impresión:

Además de haber corregido las erratas encontradas en la primera impresión, de haber reescrito unas pocas frases y de haber añadido otras aclaratorias, en los ejercicios complementarios a la sección 1 se han introducido las definiciones de la delta de Kronecker y del tensor de permutaciones, y se han incluido sendas notas tras los ejercicios 2.3 y 3.9.

Santiago de Compostela, 8 de noviembre de 2006.

ÚLTIMA COMPILACIÓN: Santiago de Compostela, 27 de enero de 2009.

Capítulo I

Álgebra Tensorial

1. PUNTOS. VECTORES. TENSORES

1. Considérese la aplicación $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector fijo. Probar que $\mathbf{a} = \psi(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$.

   SOLUCIÓN. Si $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ es la expresión de $\mathbf{a}$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, resulta

   $$\psi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_j\delta_{ji} = a_i, \tag{1}$$

   y entonces $\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i = \psi(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$. ■

2. **(Teorema de representación de formas lineales)** Demuéstrese que, si $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ es lineal, entonces existe un único vector $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ tal que $\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

   SOLUCIÓN. La unicidad es obvia. Para demostrar la existencia tómese $\mathbf{a} = \psi(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$. ■

3. Probar que la suma $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ y el producto $\mathbf{ST}$ son tensores.

   SOLUCIÓN. $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son endomorfismos de $\mathcal{V}$, y por lo tanto la suma $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ y la composición $\mathbf{ST}$ también. ■

4. Probar que el traspuesto $\mathbf{S}^T$ de $\mathbf{S}$ existe y es único.

   SOLUCIÓN. Dado un tensor $\mathbf{S}$, se demuestra que existe un único tensor (que denotaremos) $\mathbf{S}^T$ tal que

   $$(\mathbf{Su}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}^T\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2}$$

   Unicidad: si se cumple (2) para un cierto tensor $\mathbf{S}^T$, entonces $S^T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S}^T\mathbf{e}_j) = (\mathbf{Se}_i) \cdot \mathbf{e}_j = S_{ji}$.

Existencia: si definimos $S^T_{ij} = S_{ji}$, entonces $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}^T\mathbf{v}) = u_k(S_{ik}v_i) = (S_{ik}u_k)v_i = (\mathbf{Su}) \cdot \mathbf{v}$. ∎

5. Probar que el producto tensorial $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ es un tensor.

SOLUCIÓN. $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es lineal porque $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$ para $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. ∎

6. Pruébense:

a) $\mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{Sa}) \otimes \mathbf{b}$,

b) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b})$,

c) $(\mathbf{S}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{S}$.

SOLUCIÓN.

a) $[\mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})]_{ij} = S_{ik}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{kj} = S_{ik}a_kb_j = (\mathbf{Sa})_ib_j = [(\mathbf{Sa}) \otimes \mathbf{b}]_{ij}$.

b) $[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}]_{ij} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ik}S_{kj} = a_ib_kS_{kj} = a_ib_kS^T_{jk} = a_i(\mathbf{S}^T\mathbf{b})_j = [\mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b})]_{ij}$.

c) $[(\mathbf{S}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i]_{jk} = (\mathbf{S}\mathbf{e}_i)_j\delta_{ik} = (\mathbf{S}\mathbf{e}_k)_j = S_{jm}\delta_{km} = S_{jk}$. ∎

7. Demostrar que se satisfacen las siguientes igualdades:

a) $(\mathbf{S} + \mathbf{T})^T = \mathbf{S}^T + \mathbf{T}^T$,

b) $(\mathbf{ST})^T = \mathbf{T}^T\mathbf{S}^T$,

c) $(\mathbf{S}^T)^T = \mathbf{S}$,

d) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$,

e) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$,

f) $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i & \text{si} \quad i = j \end{cases}$ (aquí índices repetidos *no* suman),

g) $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$,

h) $\operatorname{tr} \mathbf{S}^T = \operatorname{tr} \mathbf{S}$,

i) $\operatorname{tr} (\mathbf{ST}) = \operatorname{tr} (\mathbf{TS})$,

j) $\mathbf{I} \cdot \mathbf{S} = \operatorname{tr} \mathbf{S}$,

k) $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{ST}) = (\mathbf{S}^T\mathbf{R}) \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{R}\mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{S}$,

l) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{Sv} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$,

m) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{bv})$.

SOLUCIÓN. En el ejercicio 4 se demostró que $S^T_{ij} = S_{ji}$. Con esto alguno de los apartados es evidente y se enuncia sin ningún comentario.

a) $(\mathbf{S}+\mathbf{T})^T = \mathbf{S}^T + \mathbf{T}^T$.

b) $[(\mathbf{ST})^T]_{ij} = (\mathbf{ST})_{ji} = S_{jk}T_{ki} = T^T_{ik}S^T_{kj} = (\mathbf{T}^T\mathbf{S}^T)_{ij}$.

c) $(\mathbf{S}^T)^T = \mathbf{S}$.

d) $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$.

e) $[(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})]_{ij} = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ik}(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})_{kj} = a_ib_kc_kd_j = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\otimes\mathbf{d})_{ij}$.

f) En virtud del apartado anterior, $(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)$.

g) $(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i)_{jk} = \delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$.

h) $\operatorname{tr}\mathbf{S}^T = \operatorname{tr}\mathbf{S}$.

i) $\operatorname{tr}(\mathbf{ST}) = (\mathbf{ST})_{ii} = S_{ij}T_{ji} = T_{ji}S_{ij} = (\mathbf{TS})_{jj} = \operatorname{tr}(\mathbf{TS})$.

j) $\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} = \delta_{ij}S_{ij} = S_{ii} = \operatorname{tr}\mathbf{S}$.

k) $\mathbf{R}\cdot(\mathbf{ST}) = R_{ij}(\mathbf{ST})_{ij} = R_{ij}S_{ik}T_{kj} = S^T_{ki}R_{ij}T_{kj} = (\mathbf{S}^T\mathbf{R})_{kj}T_{kj} = (\mathbf{S}^T\mathbf{R})\cdot\mathbf{T}$, y
$\mathbf{R}\cdot(\mathbf{ST}) = R_{ij}(\mathbf{ST})_{ij} = R_{ij}S_{ik}T_{kj} = R_{ij}T^T_{jk}S_{ik} = (\mathbf{RT}^T)_{ik}S_{ik} = (\mathbf{RT}^T)\cdot\mathbf{S}$.

l) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{Sv} = u_iS_{ij}v_j = S_{ij}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})_{ij} = \mathbf{S}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})$.

m) $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = a_ib_ju_iv_j = a_iu_ib_jv_j = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{bv})$. ■

8. Probar:

a) $\mathbf{v} = \mathbf{Su}$ equivale a $v_i = S_{ij}u_j$,

b) $(\mathbf{S}^T)_{ij} = S_{ij}$,

c) $(\mathbf{ST})_{ij} = S_{ik}T_{kj}$,

d) $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij} = a_ib_j$,

e) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = S_{ij}T_{ij}$.

SOLUCIÓN. Algunos ya han sido resueltos; otros son evidentes. Resolvemos solamente el (d): $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j) = a_ib_j$. ■

9. Demostrar que la operación $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$ es un producto interior.

SOLUCIÓN. En efecto, ya que se satisfacen claramente:

a) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$,

b) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}$ es lineal en $\mathbf{T}$ para $\mathbf{S}$ fijo,

c) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} \geq 0$, y

d) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = 0$ solamente cuando $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. ■

10. Probar los apartados siguientes:

a) Si $\mathbf{S}\in\mathrm{Sym}$, entonces $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{T}^T = \mathbf{S}\cdot(\frac{1}{2}(\mathbf{T}+\mathbf{T}^T))$.

b) Si $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$, entonces $\mathbf{W} \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{W} \cdot (\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T))$.

c) Si $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ y $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$, entonces $\mathbf{S} \cdot \mathbf{W} = 0$.

d) Si $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = 0$ para todo $\mathbf{S} \in \mathrm{Lin}$, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{0}$.

e) Si $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = 0$ para todo $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$, entonces $\mathbf{T} \in \mathrm{Skw}$.

f) Si $\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0$ para todo $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$, entonces $\mathbf{T} \in \mathrm{Sym}$.

Solución. Es fácil demostrar que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T \quad \forall\, \mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathrm{Lin}$ (ver ejercicios complementarios). Recordemos que $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ (o $\mathbf{S}$ simétrico) significa $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ y $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$ (o $\mathbf{W}$ antisimétrico) significa $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$.

a) $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T$.

b) $\mathbf{W} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{T}^T = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{T}^T$.

c) Usando (a), $\mathbf{S} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{S} \cdot (\frac{1}{2}(\mathbf{W} + \mathbf{W}^T)) = 0$.

d) En particular, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 0$, de donde $\mathbf{T} = \mathbf{0}$.

e) Se prueba que $\mathbf{T} + \mathbf{T}^T = \mathbf{0}$. Nótese que $\mathbf{T} + \mathbf{T}^T \in \mathrm{Sym}$, y por el apartado (a) $(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \cdot (\frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)) = 0$ para todo $\mathbf{R} \in \mathrm{Lin}$, lo cual implica $\mathbf{T} + \mathbf{T}^T = \mathbf{0}$, según (d).

f) Se prueba que $\mathbf{T} - \mathbf{T}^T = \mathbf{0}$. El razonamiento es análogo al de (e). Úsese el apartado (b) teniendo presente que $\mathbf{T} - \mathbf{T}^T \in \mathrm{Skw}$. ■

11. *Cambiamos enunciado.* Probar que $W_{ii} = 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ si $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$ (aquí índices repetidos *no* suman). Por lo tanto, $\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$ o, equivalentemente, la traza de un tensor es igual a la traza de su parte simétrica.

Solución. $W_{ii} = W^T_{ii} = -W_{ii}$ implica $W_{ii} = 0$. Entonces, $\mathrm{tr}\,\mathbf{W} = W_{ii} = 0$ (aquí índices repetidos suman).
Si $\mathbf{T} \in \mathrm{Lin}$, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{W}$ con $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \in \mathrm{Sym}$ (parte simétrica de $\mathbf{T}$) y $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \in \mathrm{Skw}$ (parte antisimétrica). La equivalencia enunciada se deduce ahora de la linealidad de traza. ■

12. Probar que $\mathbf{Q}$ es ortogonal si, y solo si, $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Solución. $\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}$ significa que $\mathbf{Q}$ conserva productos interiores; esto es, que

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{3}$$

Si $\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathbf{u} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Qu} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$; es decir, $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.
Si $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, y por lo tanto $\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}$. ■

13. *Cambiamos enunciado.* Sea $\mathbf{H} = \mathbf{Q} - \mathbf{I}$. Probar que $\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}$ si, y solo si, $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$.

    SOLUCIÓN. $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{Q} - \mathbf{I} + \mathbf{Q}^T - \mathbf{I} + (\mathbf{Q} - \mathbf{I})(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) = \mathbf{Q} - \mathbf{I} + \mathbf{Q}^T - \mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T + \mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}$, y se aplica el ejercicio 12. ■

14. Sea $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ una aplicación trilineal y antisimétrica; es decir, φ es lineal en cada argumento y

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

    para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$. Probar que, si $\mathbf{S} \in \mathrm{Lin}$, entonces

$$\varphi(\mathbf{S}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{S}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{S}\mathbf{e}_3) = (\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

    SOLUCIÓN. Nótese en primer lugar que φ vale 0 cuando dos argumentos se repiten: $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$, $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$, etc. Además, $\mathbf{S}\mathbf{e}_i = (\mathbf{S}\mathbf{e}_i)_j \mathbf{e}_j = S_{jk}\delta_{ki}\mathbf{e}_j = S_{ji}\mathbf{e}_j$, de ahí que

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{S}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{S}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{S}\mathbf{e}_3) &= \\ \varphi(S_{j1}\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, S_{j2}\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, S_{j3}\mathbf{e}_j) &= \\ \varphi(S_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, S_{22}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, S_{33}\mathbf{e}_3) &= \\ S_{ii}\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathrm{tr}\,\mathbf{S})\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), & \end{aligned} \tag{4}$$

    como queríamos demostrar. ■

15. Sea $\mathbf{Q}$ un tensor ortogonal, y sea $\mathbf{e}$ un vector no nulo tal que $\mathbf{Q}\mathbf{e} = \mathbf{e}$[1]. Probar que:

    a) $\mathbf{Q}^T\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

    b) El vector axial correspondiente a la parte antisimétrica de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{w}$, es paralelo a $\mathbf{e}$.

    SOLUCIÓN.

    a) $\mathbf{Q}^T\mathbf{e} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} = \mathbf{e}$, ya que $\mathbf{Q}\mathbf{e} = \mathbf{e}$ y $\mathbf{Q}$ es ortogonal.

    b) Si $\mathbf{Q}^A$ es la parte antisimétrica de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{w}$ es su vector axial, $\mathbf{w} \times \mathbf{e} = \mathbf{Q}^A\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}\mathbf{e} - \mathbf{Q}^T\mathbf{e}) = \mathbf{0}$. ■

16. Probar que si $\mathbf{w}$ es el vector axial de $\mathbf{W}$, entonces $|\mathbf{w}| = (1/\sqrt{2})|\mathbf{W}|$.

[1] Cuando el tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ es una rotación, un tal vector $\mathbf{e}$ siempre existe, puesto que 1 es autovalor de cualquier aplicación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ con determinante positivo (es decir, de cualquier rotación). Consúltese por ejemplo [3, p. 400 en la sección 8.8: "Aplicaciones ortogonales: parte II", o bien p. 453 en la sección 10.4: "Movimientos en el espacio"].

SOLUCIÓN. Aquí $|\mathbf{W}| = (\mathbf{W}\cdot\mathbf{W})^{\frac{1}{2}} = (W_{ij}W_{ij})^{\frac{1}{2}}$. Necesariamente $\mathbf{w}$ y $\mathbf{W}$ son de la forma siguiente:

$$\mathbf{w} = (\alpha,\beta,\gamma)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

de donde $|\mathbf{W}| = (2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}|\mathbf{w}|$. ■

SOLUCIÓN ALTERNATIVA. El vector axial de $\mathbf{W}$ es $\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}\mathbf{e}_i$ (ver ejercicios complementarios), con lo cual $|\mathbf{w}|^2 = \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = w_iw_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}W_{jk}\varepsilon_{ilm}W_{lm} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_{jk}W_{lm} = \frac{1}{4}(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})W_{jk}W_{lm} = \frac{1}{4}(W_{jk}W_{jk}-W_{jk}W_{kj}) = \frac{1}{2}W_{jk}W_{jk} = \frac{1}{2}\mathbf{W}\cdot\mathbf{W} = \frac{1}{2}|\mathbf{W}|^2$. ■

17. *Cambiamos enunciado.* Sean $\mathbf{D}\in$ Psym y $\mathbf{S}\in$ Lin invertible. Probar que $\mathbf{SDS}^T\in$ Psym.

SOLUCIÓN. $\mathbf{SDS}^T$ es simétrico ya que $(\mathbf{SDS}^T)^T = \mathbf{SD}^T\mathbf{S}^T = \mathbf{SDS}^T$. También es definido positivo ya que, si $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{SDS}^T)\mathbf{v} = \mathbf{S}^T\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{S}^T\mathbf{v}) > 0$, por ser $\mathbf{D}$ definido positivo y $\mathbf{S}^T\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Nótese que es necesario que $\mathbf{S}$ sea invertible para que $\mathbf{S}^T\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. ■

Ejercicios complementarios

Entiéndase siempre que los índices i, j, k, l... varían en el conjunto $\{1,2,3\}$. Se recuerda la definición de la delta o símbolo de Kronecker δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j, \\ 0 & \text{si} \quad i\neq j, \end{cases} \tag{6}$$

y del tensor de permutaciones ε_{ijk}:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad ijk \text{ es una permutación par de } \{1,2,3\}, \\ -1 & \text{si} \quad ijk \text{ es una permutación impar de } \{1,2,3\}, \\ 0 & \text{si} \quad ijk \text{ no es una permutación de } \{1,2,3\}. \end{cases} \tag{7}$$

Así pues: $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$, $\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1$, $\varepsilon_{ijk}=0$ si hay índices repetidos.

Supónganse conocidas las fórmulas:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \varepsilon_{ijk}u_jv_k\mathbf{e}_i, \tag{8}$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \varepsilon_{ijk}u_iv_jw_k, \tag{9}$$

$$\det\mathbf{S} = \varepsilon_{ijk}S_{1i}S_{2j}S_{3k}. \tag{10}$$

c.1. **(Propiedades de $\boldsymbol{\varepsilon_{ijk}}$)** Probar las siguientes propiedades de ε_{ijk}:

a) $\varepsilon_{pij}\varepsilon_{pkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$, *b*) $\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{pqj} = 2\delta_{ij}$,

c) $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqr} = 6$.

SOLUCIÓN.

a) Considérense los siguientes cuatro casos: **(1)** $i = j$; **(2)** $k = l$; **(3)** $i \neq j$, $k \neq l$, $\{i, j\} \neq \{k, l\}$; **(4)** $i \neq j$, $k \neq l$, $\{i, j\} = \{k, l\}$.

b) Considérense los casos $i = j$ e $i \neq j$.

c) En los sumatorios que siguen, σ recorre las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$. $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqr} = \sum_\sigma \varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}\ \varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)} = \sum_\sigma 1 = 3! = 6$. ■

c.2. **(Vector axial de un tensor antisimétrico)**

a) Sea $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$. Probar que existe un único vector $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{Wu} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u} \in \mathcal{V}$, y que además $\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}\mathbf{e}_i$ ($\mathbf{w}$ es el *vector axial* de $\mathbf{W}$).

b) Probar que $\mathbf{w}$ es un vector tal que $W_{ij} = \varepsilon_{ikj}w_k$ si, y solo si, $\mathbf{W}$ es antisimétrico y $\mathbf{w}$ es su vector axial.

SOLUCIÓN.

a) Unicidad: basta probar que si $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{u}$, entonces $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. En efecto, $0 = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{e}_j) = \varepsilon_{klm}\delta_{ik}w_l\delta_{jm} = \varepsilon_{ilj}w_l$ para $i, j = 1, 2, 3$, de donde $w_l = 0$ para $l = 1, 2, 3$ o, lo que es lo mismo, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Existencia: si $\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}\mathbf{e}_i$, entonces $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \varepsilon_{lmn}w_m u_n \mathbf{e}_l = \varepsilon_{lmn}(-\frac{1}{2}\varepsilon_{mjk}W_{jk})u_n\mathbf{e}_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{mln}\varepsilon_{mjk}W_{jk}u_n\mathbf{e}_l = \frac{1}{2}(\delta_{lj}\delta_{nk} - \delta_{lk}\delta_{nj})\ W_{jk}u_n\mathbf{e}_l = \frac{1}{2}(W_{jk}u_k\mathbf{e}_j - W_{jk}u_j\mathbf{e}_k) = \frac{1}{2}(W_{jk}u_k\mathbf{e}_j - W_{kj}u_k\mathbf{e}_j) = W_{jk}u_k\mathbf{e}_j = \mathbf{Wu}$.

b) Nótese que si $W_{ij} = \varepsilon_{ikj}w_k$, entonces, para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $(\mathbf{Wu})_i = W_{ij}u_j = \varepsilon_{ikj}w_k u_j = (\mathbf{w} \times \mathbf{u})_i$, y en consecuencia $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$ y $\mathbf{w}$ es su vector axial. Recíprocamente, si $\mathbf{W}$ es antisimétrico y $\mathbf{w}$ es su vector axial, entonces $W_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{W}\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{e}_j) = \varepsilon_{klm}\delta_{ik}w_l\delta_{jm} = \varepsilon_{ilj}w_l$. ■

c.3. Demostrar que la descomposición de un tensor en parte simétrica y antisimétrica es única.

SOLUCIÓN. Si $\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{W}$ con $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ y $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$, entonces $\mathbf{T}^T = \mathbf{S} - \mathbf{W}$. Sumando las dos igualdades llegamos a $\mathbf{T} + \mathbf{T}^T = 2\mathbf{S}$, de manera que debe ser $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)$. Restándolas se ve que $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)$. ■

c.4. Demostrar que, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son vectores y $\mathbf{S}, \mathbf{T}$ son tensores, se satisfacen las igualdades:

a) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{b}$, *b*) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{S}^T\cdot\mathbf{T}^T$.

Solución.

a) $[(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{c}]_i = a_i b_j c_j = a_i c_j b_j = [(\mathbf{a}\otimes\mathbf{c})\mathbf{b}]_i$.

b) $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = S_{ij}T_{ij} = S^T_{ji}T^T_{ji} = \mathbf{S}^T\cdot\mathbf{T}^T$. ■

c.5. Para cualquier tensor $\mathbf{S}$ se cumple

$$\varepsilon_{ijk}S_{il}S_{jm}S_{kn} = \varepsilon_{ijk}S_{li}S_{mj}S_{nk} = \varepsilon_{lmn}\det\mathbf{S}. \tag{11}$$

Solución.

$$\varepsilon_{ijk}S_{li}S_{mj}S_{nk} = \begin{vmatrix} S_{l1} & S_{l2} & S_{l3} \\ S_{m1} & S_{m2} & S_{m3} \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{lmn}\det\mathbf{S}. \tag{12}$$

Nótese que la última igualdad se satisface tanto si lmn es una permutación de $\{1,2,3\}$ como si no (en este caso ambos miembros valen 0).
Ahora $\varepsilon_{ijk}S_{il}S_{jm}S_{kn} = \varepsilon_{ijk}S^T_{li}S^T_{mj}S^T_{nk} = \varepsilon_{lmn}\det\mathbf{S}^T = \varepsilon_{lmn}\det\mathbf{S}$. ■

c.6. Demostrar que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es el vector axial del tensor antisimétrico $\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$.

Solución. Probamos que $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{w}\in\mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \varepsilon_{lmn}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_m w_n\mathbf{e}_l = \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{mjk}u_jv_kw_n\mathbf{e}_l = \\ -\varepsilon_{mln}\varepsilon_{mjk}u_jv_kw_n\mathbf{e}_l = -(\delta_{lj}\delta_{nk}-\delta_{lk}\delta_{nj})u_jv_kw_n\mathbf{e}_l = \\ -u_jv_kw_k\mathbf{e}_j + u_jv_kw_j\mathbf{e}_k = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{w}.\end{aligned} \tag{13}$$

■

c.7. **(Inversa de un tensor)** Para $\mathbf{S}\in\mathrm{Lin}$, se define (la *matriz de cofactores*) $\mathrm{Cof}(\mathbf{S})$ mediante $(\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}S_{pr}S_{qs}$. Demostrar que

$$(\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))^T\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))^T = (\det\mathbf{S})\mathbf{I},$$

y por lo tanto $\mathbf{S}^{-1} = (1/\det\mathbf{S})(\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))^T$ si $\det\mathbf{S}\neq 0$. Luego un tensor $\mathbf{S}$ es invertible si, y solo si, su determinante es no nulo.

Solución. Se usa (11).

$$\begin{aligned}[(\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))^T\mathbf{S}]_{ij} = (\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))_{ki}S_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}\varepsilon_{irs}S_{pr}S_{qs}S_{kj} = \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{kpq}S_{kj}S_{pr}S_{qs} = \frac{1}{2}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{jrs}(\det\mathbf{S}) = \delta_{ij}\det\mathbf{S} = [(\det\mathbf{S})\mathbf{I}]_{ij}.\end{aligned} \tag{14}$$

La otra igualdad se demuestra de forma análoga. ■

c.8. Probar que, si $\mathbf{S} \in \mathrm{Lin}$ es invertible, entonces $(\mathbf{S}^{-1})^T = (\mathbf{S}^T)^{-1}$. Suele emplearse la notación $\mathbf{S}^{-T}$ para referirse a cualquiera de los miembros de la igualdad anterior.

En consecuencia, si $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ y $\det \mathbf{S} \neq 0$, $\mathbf{S}^{-1} \in \mathrm{Sym}$.

SOLUCIÓN. Se demuestra que $\mathrm{Cof}(\mathbf{S}^T) = (\mathrm{Cof}(\mathbf{S}))^T$. ■

c.9 Demostrar que

$$\det \mathbf{S} = \frac{\mathbf{Su} \cdot (\mathbf{Sv} \times \mathbf{Sw})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}$$

para todo tensor $\mathbf{S}$, cuando $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0$.

SOLUCIÓN. Se usa (11).

$$\frac{\mathbf{Su} \cdot (\mathbf{Sv} \times \mathbf{Sw})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} = \frac{\varepsilon_{ijk} S_{ip} u_p S_{jq} v_q S_{kr} w_r}{\varepsilon_{lmn} u_l v_m w_n} = \frac{(\det \mathbf{S}) \varepsilon_{pqr} u_p v_q w_r}{\varepsilon_{lmn} u_l v_m w_n} = \det \mathbf{S}. \blacksquare$$

Algunos de estos ejercicios se han tomado de [1] y [14]. En [4] puede encontrarse otra demostración del resultado que recoge el ejercicio c.8. Una solución alternativa del ejercicio c.6 puede encontrarse en [13].

2. TEOREMA ESPECTRAL. TEOREMA DE CAYLEY–HAMILTON. TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN POLAR

1. Determinar el espectro, los espacios característicos y una descomposición espectral de cada uno de los tensores siguientes, donde $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ son vectores unitarios y ortogonales entre sí:

   a) $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$,

   b) $\mathbf{B} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}$.

   SOLUCIÓN. Nótese que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simétricos, y por lo tanto se puede usar el teorema espectral. Llamaremos $E(\omega)$ al espacio característico asociado al autovalor ω.

   a) El caso $\beta = 0$ es trivial. Supongamos $\beta \neq 0$.
   $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = (\alpha + \beta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \alpha (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m})$. Por el apartado (b) del teorema espectral (tal y como se enuncia en [2]),

   - Espectro de $\mathbf{A} = \{\alpha + \beta, \alpha\}$.
   - $E(\alpha + \beta) = \langle \mathbf{m} \rangle$, $E(\alpha) = \langle \mathbf{m} \rangle^{\perp}$.
   - Descomposición espectral de $\mathbf{A}$: sean $\mathbf{e}_1 \in E(\alpha + \beta)$ unitario (p. ej. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}$) y $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in E(\alpha)$ ortogonales y unitarios. Como $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}$ formada por autovectores se tiene por el teorema espectral que $\mathbf{A} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, donde $\omega_1 = (\alpha + \beta)$ y $\omega_2 = \omega_3 = \alpha$.

b) $\mathbf{B} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}$. Sea $\mathbf{u}$ unitario.
Como $\mathbf{Bu} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} \in \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$, se presentan dos casos:

CASO 1: Si $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$, entonces $\mathbf{Bu} = \omega \mathbf{u}$ si, y solo si, $\omega = 0$ y $\mathbf{Bu} = \mathbf{0}$. Ahora nótese que

$$\mathbf{Bu} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ y } \mathbf{m} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \langle \mathbf{n} \rangle^{\perp} \cap \langle \mathbf{m} \rangle^{\perp} = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle^{\perp}. \tag{15}$$

CASO 2: Si $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$, entonces $\mathbf{u} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}$, y por lo tanto $\mathbf{Bu} = \omega \mathbf{u}$ si, y solo si, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \omega(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u})$ y $\mathbf{m} \cdot \mathbf{u} = \omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$. Las dos últimas igualdades implican que ω solo puede ser 1 ó -1, lo que explica que nos restrinjamos a los casos $\mathbf{Bu} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{Bu} = -\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Bu} = \mathbf{u} &\Leftrightarrow \mathbf{u} \in \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \text{ y } \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{u} \Leftrightarrow \\ & \mathbf{u} \in \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \cap \langle \mathbf{m} - \mathbf{n} \rangle^{\perp} = \langle \mathbf{m} + \mathbf{n} \rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Bu} = -\mathbf{u} &\Leftrightarrow \mathbf{u} \in \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \text{ y } \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{u} \Leftrightarrow \\ & \mathbf{u} \in \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \cap \langle \mathbf{m} + \mathbf{n} \rangle^{\perp} = \langle \mathbf{m} - \mathbf{n} \rangle. \end{aligned} \tag{17}$$

Según este análisis:

- Espectro de $\mathbf{B} = \{0, 1, -1\}$.
- $E(0) = \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle^{\perp}$, $E(1) = \langle \mathbf{m} + \mathbf{n} \rangle$ y $E(-1) = \langle \mathbf{m} - \mathbf{n} \rangle$.
- Descomposición espectral de $\mathbf{B}$: eligiendo $\mathbf{e}_1 \in E(0)$, $\mathbf{e}_2 \in E(1)$ y $\mathbf{e}_3 \in E(-1)$ unitarios, se tiene $\mathbf{B} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$. ■

2. Suponiendo que es cierta la parte del teorema espectral que acaba con un (1) en el texto [2], demostrar el resto del teorema.

SOLUCIÓN. Se supone demostrado:

> Si $\mathbf{S}$ es simétrico, existe una base de $\mathcal{V}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, formada por autovectores de $\mathbf{S}$. Además, si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son los correspondientes autovalores, se tiene que $\mathbf{S} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$.

Y se demuestra el resto del teorema espectral, que dividimos en proposiciones. Se supone siempre que $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$.

Proposición *Si* $\mathbf{S} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, *con* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *base ortonormal de* $\mathcal{V}$, *entonces* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *son autovalores de* $\mathbf{S}$ *y* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *son los correspondientes autovectores.*

Demostración. $\mathbf{Se}_1 = (\omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_1 = \omega_i \delta_{1i} \mathbf{e}_i = \omega_1 \mathbf{e}_1$. Análogamente, $\mathbf{Se}_2 = \omega_2 \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{Se}_3 = \omega_3 \mathbf{e}_3$. □

Proposición $\mathbf{S}$ *tiene exactamente tres autovalores distintos si, y solo si, los espacios característicos de* $\mathbf{S}$ *son tres líneas mutuamente perpendiculares.*

Demostración.

"$\Rightarrow$" $\mathbf{S} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ con los ω_i distintos entre sí. Llamemos $E(\omega_i)$ al espacio característico asociado al autovalor ω_i. $\mathbf{u} \in E(\omega_1) \Leftrightarrow \mathbf{Su} = \omega_1 \mathbf{u} \Leftrightarrow (\omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{u} = \omega_1 \mathbf{u} \Leftrightarrow \omega_i u_i \mathbf{e}_i = \omega_1 u_i \mathbf{e}_i \Leftrightarrow \omega_1 u_1 = \omega_1 u_1, \omega_2 u_2 = \omega_1 u_2, \omega_3 u_3 = \omega_1 u_3 \Leftrightarrow u_2 = u_3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle$. Luego $E(\omega_1) = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$. Del mismo modo se ve que $E(\omega_2) = \langle \mathbf{e}_2 \rangle$ y $E(\omega_3) = \langle \mathbf{e}_3 \rangle$, lo que demuestra que los espacios característicos son tres líneas mutuamente perpendiculares.

"$\Leftarrow$" Si fuese $\omega_i = \omega_j$ con $i \neq j$, entonces $E(\omega_i) = E(\omega_j)$, lo que no es posible si $E(\omega_i)$ y $E(\omega_j)$ son líneas perpendiculares. $\square$

Proposición $\mathbf{S}$ *tiene exactamente dos autovalores distintos si, y solo si,* $\mathbf{S} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$*, con* $|\mathbf{e}| = 1$ *y* $\omega_1 \neq \omega_2$*. En tal caso* ω_1 *y* ω_2 *son los dos autovectores distintos de* $\mathbf{S}$ *y los correspondientes espacios característicos son* $\langle \mathbf{e} \rangle$ *y* $\langle \mathbf{e} \rangle^\perp$*, respectivamente.*

Demostración.

"$\Rightarrow$" Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, con $\omega_1 \neq \omega_2$ y $\omega_2 = \omega_3$, los autovalores de $\mathbf{S}$ y sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la correspondiente base ortonormal de autovectores. Sabemos que $\mathbf{S} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \omega_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$, de donde $\mathbf{S} = \omega_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)$, ya que $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$ (ver ejercicio 1.7). Ahora se comprueba que $E(\omega_1) = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ y que $E(\omega_2) = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp$, como se hizo en la demostración anterior.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $\mathbf{S} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$, con $|\mathbf{e}| = 1$ y $\omega_1 \neq \omega_2$. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormal de $\mathcal{V}$ con $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$. Empleando de nuevo la identidad $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$, resulta $\mathbf{S} = \omega_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$, y por lo tanto ω_1 y ω_2 son los únicos autovectores de $\mathbf{S}$ y sus correspondientes espacios característicos son $E(\omega_1) = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ y $E(\omega_2) = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{e} \rangle^\perp$. $\square$

Proposición *Recíprocamente, si* $\langle \mathbf{e} \rangle$ *y* $\langle \mathbf{e} \rangle^\perp$*, con* $|\mathbf{e}| = 1$*, son los espacios característicos de* $\mathbf{S}$*, entonces* $\mathbf{S}$ *es de la forma* $\mathbf{S} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$*, con* $\omega_1 \neq \omega_2$*.*

Demostración. Como $E(\omega_1) = \langle \mathbf{e} \rangle \neq E(\omega_2) = \langle \mathbf{e} \rangle^\perp$, es claro que $\omega_1 \neq \omega_2$. Sean $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \langle \mathbf{e} \rangle^\perp$ ortogonales. Entonces, $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}$ formada por autovectores, y por lo tanto $\mathbf{S} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ si llamamos $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$ y $\omega_3 = \omega_2$. Es decir, $\mathbf{S} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})$, ya que $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}$ (ver ejercicio 1.7). $\square$

Proposición $\mathbf{S}$ *tiene exactamente un autovalor si, y solo si,* $\mathbf{S} = \omega \mathbf{I}$*. En ese caso* ω *es el autovalor de* $\mathbf{S}$ *y* $\mathcal{V}$ *es el correspondiente espacio característico.*

Demostración.

"⇒" Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, con $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$, los autovalores de $\mathbf{S}$ y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la correspondiente base ortonormal formada por autovectores. Entonces, $\mathbf{S} = \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \omega \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \omega \mathbf{I}$, con ω autovalor de $\mathbf{S}$. Por otra parte, $\mathbf{Su} = \omega \mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u} \in \mathcal{V}$, así que $E(\omega) = \mathcal{V}$ es el espacio característico asociado a ω.

"⇐" Sea $\mathbf{S} = \omega \mathbf{I}$. Sea $\mathbf{u}$ unitario. $\mathbf{Su} = \lambda \mathbf{u} \Leftrightarrow \omega \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \Leftrightarrow \lambda = \omega$, así que ω es el único autovalor de $\mathbf{S}$. □

Proposición *Recíprocamente, si $\mathcal{V}$ es un espacio característico de $\mathbf{S}$, entonces $\mathbf{S} = \omega \mathbf{I}$.*

Demostración. Si ω es un autovalor de $\mathbf{S}$ cuyo espacio característico es $E(\omega) = \mathcal{V}$, podemos elegir $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in E(\omega) = \mathcal{V}$ tales que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}$ formada por autovectores. Entonces, $\mathbf{S} = \omega \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \omega \mathbf{I}$. ■

3. Sean $\mathbf{D}$ un tensor simétrico y $\mathbf{Q}$ un tensor ortogonal. Probar que el espectro de $\mathbf{D}$ es igual al espectro de $\mathbf{QDQ}^T$. Probar también que si $\mathbf{e}$ es un autovector de $\mathbf{D}$, entonces $\mathbf{Qe}$ es un autovector de $\mathbf{QDQ}^T$ correspondiente al mismo autovalor.

Solución. Notemos que

$$\omega \text{ autovalor de } \mathbf{D} \Leftrightarrow \det(\mathbf{D} - \omega \mathbf{I}) = 0 \tag{18}$$

y

$$\omega \text{ autovalor de } \mathbf{QDQ}^T \Leftrightarrow \det(\mathbf{QDQ}^T - \omega \mathbf{I}) = 0. \tag{19}$$

Ahora demostramos que $\det(\mathbf{QDQ}^T - \omega \mathbf{I}) = \det(\mathbf{D} - \omega \mathbf{I})$:

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{QDQ}^T - \omega \mathbf{I}) = \det(\mathbf{QDQ}^T - \omega \mathbf{QQ}^T) = \det[\mathbf{Q}(\mathbf{D} - \omega \mathbf{I})\mathbf{Q}^T] = \\ &\det \mathbf{Q}\ \det(\mathbf{D} - \omega \mathbf{I}) \det(\mathbf{Q}^T) = (\det \mathbf{Q})^2 \det(\mathbf{D} - \omega \mathbf{I}) = \det(\mathbf{D} - \omega \mathbf{I}). \end{aligned} \tag{20}$$

Por último, si $\mathbf{De} = \omega \mathbf{e}$, entonces $\mathbf{QDQ}^T(\mathbf{Qe}) = \mathbf{QDe} = \mathbf{Q}(\omega \mathbf{e}) = \omega(\mathbf{Qe})$. Además $\mathbf{Qe}$ es unitario porque $\mathbf{Q}$ es ortogonal. ■

Nota *El argumento empleado en el ejercicio 3 muestra que si $\mathbf{D}$ es un tensor cualquiera y $\mathbf{T}$ es un tensor invertible, entonces $\mathbf{D}$ y $\mathbf{TDT}^{-1}$ tienen el mismo polinomio característico, y en consecuencia los mismos autovalores.*

4. Un tensor $\mathbf{P}$ es una proyección perpendicular si $\mathbf{P}$ es simétrico y $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Se pide:

   a) Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario. Probar que cada uno de los siguientes tensores es una proyección perpendicular:

$$\mathbf{I}, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{21}$$

b) Probar que, recíprocamente, si $\mathbf{P}$ es una proyección perpendicular, entonces $\mathbf{P}$ admite una de las representaciones (21).

SOLUCIÓN.

a) Es claro que $\mathbf{I}$ y $\mathbf{0}$ son proyecciones perpendiculares. Recordemos que $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ y que $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\otimes\mathbf{d}$ (ejercicio 1.7). Entonces, $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ es simétrico y $(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})^2 = (\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$, de modo que $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ es una proyección perpendicular.

Ahora veamos que si $\mathbf{P}$ es una proyección perpendicular, también lo es $\mathbf{I}-\mathbf{P}$: obviamente $\mathbf{I}-\mathbf{P}$ es simétrico si lo es $\mathbf{P}$ y además

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})^2 = (\mathbf{I}-\mathbf{P})(\mathbf{I}-\mathbf{P}) = \mathbf{I}-\mathbf{P}-\mathbf{P}+\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}-\mathbf{P}-\mathbf{P}+\mathbf{P} = \mathbf{I}-\mathbf{P}. \tag{22}$$

b) Como $\mathbf{P}$ es simétrico, se tiene por el teorema espectral que $\mathbf{P} = \omega_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i$, donde $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ es el espectro de $\mathbf{P}$ y $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ la correspondiente base ortonormal de autovectores. Por otra parte los únicos autovalores que puede tener $\mathbf{P}$ son 0 y 1: en efecto, si $\mathbf{u}$ es unitario y $\mathbf{Pu} = \omega\mathbf{u}$, entonces $\omega\mathbf{u} = \mathbf{Pu} = \mathbf{P}^2\mathbf{u} = \mathbf{P}(\mathbf{Pu}) = \mathbf{P}(\omega\mathbf{u}) = \omega\mathbf{Pu} = \omega^2\mathbf{u}$, de donde $\omega = \omega^2$. Así pues, se presentan cuatro casos:

CASO 1 Si los tres autovalores de $\mathbf{P}$ son 0, entonces $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

CASO 2 Si los tres son 1, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

CASO 3 Si dos son 0 y el otro es 1, $\mathbf{P} = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$, con $|\mathbf{n}| = 1$.

CASO 4 Si dos son 1 y el otro es 0, $\mathbf{P} = \mathbf{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$, con $|\mathbf{n}| = 1$. Por ejemplo, si $\omega_1 = \omega_2 = 1$ y $\omega_3 = 0$, entonces $\mathbf{P} = \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 = \mathbf{I}-\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$, ya que $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i = \mathbf{I}$. ■

5. Probar que un tensor $\mathbf{S}$ (no necesariamente simétrico) conmuta con todo tensor antisimétrico $\mathbf{W}$ si, y solo si, $\mathbf{S} = \omega\mathbf{I}$.

SOLUCIÓN.

"⇒" Supongamos que $\mathbf{SW} = \mathbf{WS}$ para todo $\mathbf{W}\in\mathrm{Skw}$. Sea $\mathbf{v}\in\mathcal{V}\setminus\{\mathbf{0}\}$ y sea $\mathbf{W}$ el tensor antisimétrico definido por $\mathbf{Wu} = \mathbf{v}\times\mathbf{u}$. (Es decir, $\mathbf{v}$ es el vector axial de $\mathbf{W}$.) Entonces $\mathbf{Sv}\in\mathrm{Ker}\mathbf{W} = \langle\mathbf{v}\rangle$, ya que

$$\mathbf{WSv} = \mathbf{SWv} = \mathbf{S}(\mathbf{v}\times\mathbf{v}) = \mathbf{S0} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

En consecuencia, para cada $\mathbf{v}\in\mathcal{V}\setminus\{\mathbf{0}\}$ existe $\omega(\mathbf{v})\in\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{Sv} = \omega(\mathbf{v})\mathbf{v}$. Probaremos que el escalar $\omega(\mathbf{v})$ no depende de $\mathbf{v}$.

Si llamamos ω_i a $\omega(\mathbf{e}_i)$, resulta

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{Se}_j) = \mathbf{e}_i\cdot(\omega_j\mathbf{e}_j) = \omega_j\delta_{ij}, \tag{24}$$

donde ni en $\omega_j\mathbf{e}_j$ ni en $\omega_j\delta_{ij}$ hay suma en j.

Ahora basta ver que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, lo que se puede probar eligiendo $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$ tal que $v_i \neq 0$ para todo $i\in\{1,2,3\}$. En efecto, la igualdad

$$\omega(\mathbf{v})v_i = [\omega(\mathbf{v})\mathbf{v}]_i = (\mathbf{Sv})_i = S_{ij}v_j = \omega_j\delta_{ij}v_j = \omega_i v_i \tag{25}$$

(donde en $\omega_i v_i$ no hay suma en i) implica que $\omega_i = \omega(\mathbf{v})$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Nótese que de esta forma hemos probado que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, y por lo tanto, si llamamos ω a ese valor común, (24) nos dice que $S_{ij} = \omega\delta_{ij}$ o, lo que es lo mismo, que $\mathbf{S} = \omega\mathbf{I}$.

"$\Leftarrow$" Esta implicación es evidente. ■

Nota *El ejercicio 5 implica que, dado un tensor* $\mathbf{S}$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{SR} = \mathbf{RS}$ *para todo tensor* $\mathbf{R}$.

(ii) $\mathbf{SW} = \mathbf{WS}$ *para todo tensor antisimétrico* $\mathbf{W}$.

(iii) $\mathbf{S} = \omega\mathbf{I}$ *para cierto* $\omega \in \mathbb{R}$.

6. Sean $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ y $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ las descomposiciones polares, a derecha e izquierda, de $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+$.

   a) Probar que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tienen el mismo espectro $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

   b) Probar que $\mathbf{F}$ y $\mathbf{R}$ admiten las representaciones

$$\mathbf{F} = \omega_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i,$$

   donde $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{f}_i$ son, respectivamente, los autovectores de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ correspondientes a ω_i.

SOLUCIÓN. Recordemos que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son simétricos, y por lo tanto se les puede aplicar el teorema espectral.

a) Como $\mathbf{U} = \mathbf{RVR}^T$, se tiene por el ejercicio 3 que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tienen los mismos autovalores ω_i y que, si $\mathbf{e}_i$ es un autovector de $\mathbf{U}$ asociado a ω_i, entonces $\mathbf{f}_i = \mathbf{R}\mathbf{e}_i$ es un autovector de $\mathbf{V}$ asociado al mismo autovalor.

b) $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{R}(\omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \omega_i \mathbf{R}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \omega_i(\mathbf{R}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i = \omega_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$.
Veamos ahora que $\mathbf{R} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$:
$(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{U} = (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \omega_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \omega_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{F}$, lo que implica que $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$ tiene determinante positivo, porque $\mathbf{U}$ y $\mathbf{F}$ pertenecen a Lin^+. Además $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$ es ortogonal, porque

$$(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i)^T = (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_i) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i) = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i = \mathbf{I}. \quad (26)$$

Hemos probado que $\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$ es una rotación que satisface la igualdad $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{U}$, así que $\mathbf{R} = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i$, por la unicidad de la descomposición polar. ■

7. Sea $\mathbf{R}$ la rotación de la descomposición polar de $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+$. Probar que $\mathbf{R}$ es la rotación más próxima a $\mathbf{F}$, en el sentido de que $|\mathbf{F} - \mathbf{R}| < |\mathbf{F} - \mathbf{Q}|$ para todas las rotaciones $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$.

Solución. Sea $\mathbf{Q}$ una rotación distinta de $\mathbf{R}$. Veremos que $|\mathbf{F}-\mathbf{Q}|^2 - |\mathbf{F}-\mathbf{R}|^2 > 0$.

Por ser $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ rotaciones, sus columnas forman una base ortonormal de $\mathcal{V}$ (ver p. ej. [4]), y por lo tanto $|\mathbf{Q}|^2 = |\mathbf{R}|^2 = 3$. Así pues, $|\mathbf{F}-\mathbf{Q}|^2 = (\mathbf{F}-\mathbf{Q})\cdot(\mathbf{F}-\mathbf{Q}) = |\mathbf{F}|^2 - 2\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q} + 3$ y análogamente $|\mathbf{F}-\mathbf{R}|^2 = |\mathbf{F}|^2 - 2\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}+3$, con lo cual

$$|\mathbf{F}-\mathbf{Q}|^2 - |\mathbf{F}-\mathbf{R}|^2 = 2\mathbf{F}\cdot\mathbf{R} - 2\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q} = 2\mathbf{F}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{Q}). \tag{27}$$

Sea $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ la descomposición polar de $\mathbf{F}$ a la derecha y sea $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}$. (Nótese que $\mathbf{Q}_0$ es una rotación *distinta* de $\mathbf{I}$ porque $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$.) Entonces,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{F}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{Q}) = 2\,\mathrm{tr}\,[\mathbf{F}^T(\mathbf{R}-\mathbf{Q})] = 2\,\mathrm{tr}\,[\mathbf{U}^T\mathbf{R}^T(\mathbf{R}-\mathbf{Q})] = \\ 2\,\mathrm{tr}\,[\mathbf{U}^T(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_0)] = 2\mathbf{U}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_0) \end{aligned} \tag{28}$$

y, como $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{S}^T\cdot\mathbf{T}^T$ para todo par de tensores $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{U}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_0) = \mathbf{U}\cdot[(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_0) + (\mathbf{I}-\mathbf{Q}_0^T)] = \\ \mathbf{U}\cdot(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})(\mathbf{Q}_0^T-\mathbf{I}) = \mathbf{U}\cdot(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T. \end{aligned} \tag{29}$$

Usando la igualdad $\mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}\mathbf{T}) = (\mathbf{S}^T\mathbf{R})\cdot\mathbf{T}$ y de nuevo $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{S}^T\cdot\mathbf{T}^T$,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\cdot(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T = (\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}\cdot(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T = \\ \mathbf{U}^T(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})\cdot(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I}) = \mathrm{tr}\,[(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})]. \end{aligned} \tag{30}$$

Según (27), (28), (29) y (30),

$$|\mathbf{F}-\mathbf{Q}|^2 - |\mathbf{F}-\mathbf{R}|^2 = \mathrm{tr}\,[(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})], \tag{31}$$

que es estrictamente positivo porque $(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})$ es simétrico semidefinido positivo y no nulo. Es claro que es simétrico; vemos a continuación que es semidefinido positivo:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})\mathbf{u} = (\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})\mathbf{u} \geq 0, \tag{32}$$

porque $\mathbf{U}$ es definido positivo. Hay que notar que $\mathbf{Q}_0-\mathbf{I}$ es distinto de $\mathbf{0}$ pero singular[2], y por lo tanto también es singular $(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})$, lo que implica que *no es* definido positivo.

Para demostrar que $(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0-\mathbf{I})$ es no nulo veremos que si $\mathbf{S}\neq\mathbf{0}$ y $\mathbf{U}\in\mathrm{PSym}$, entonces $\mathbf{S}^T\mathbf{U}\mathbf{S}\neq\mathbf{0}$ (esto es obvio si $\mathbf{S}$ es no singular). En primer lugar notemos que $\mathbf{U} = \omega_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i$ con $\omega_i > 0$ para todo $i\in\{1,2,3\}$. Si fuese $\mathbf{S}^T\mathbf{U}\mathbf{S} = \mathbf{0}$ tendríamos $0 = (\mathbf{S}^T\mathbf{U}\mathbf{S})_{ii} = (\mathbf{S}^T\mathbf{U})_{ij}S_{ji} = S_{ki}U_{kj}S_{ji} = S_{ki}\omega_k\delta_{kj}S_{ij} = \omega_j(S_{ji})^2$ (solo hay suma en j), de donde $S_{ji} = 0$ para todo $i,j\in\{1,2,3\}$ y, por lo tanto, $\mathbf{S}=\mathbf{0}$.

Solo falta demostrar que un tensor $\mathbf{S}$ simétrico, semidefinido positivo y no nulo tiene traza estrictamente positiva. Por el teorema espectral, $\mathbf{S} = \omega_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i$. Como $\omega_i\geq 0$ porque $\mathbf{S}$ es semidefinida positiva, también $\mathrm{tr}\,\mathbf{S} = \omega_1+\omega_2+\omega_3\geq 0$, y es 0 solo cuando $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$, es decir, cuando $\mathbf{S}=\mathbf{0}$. ■

[2]Puesto que 1 es autovalor de cualquier rotación. Ver nota al pie de la página 13.

Capítulo II

Análisis Tensorial

3. DIFERENCIACIÓN

1. Calcular $D\mathbf{G}(\mathbf{A})$ para cada una de las siguientes funciones $\mathbf{G} : \mathrm{Lin} \to \mathrm{Lin}$.

   a) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A}$,

   b) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{ABA}$ ($\mathbf{B}$ un tensor dado),

   c) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$,

   d) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Au})\mathbf{A}$ ($\mathbf{u}$ un vector dado).

   Solución. En los cuatro apartados la función es de la forma $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{f}(\mathbf{A}), \mathbf{g}(\mathbf{A}))$, con $\boldsymbol{\pi}$ bilineal y $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ lineales, de modo que

$$D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{f}(\mathbf{A}), D\mathbf{g}(\mathbf{A})[\mathbf{U}]) + \boldsymbol{\pi}(D\mathbf{f}(\mathbf{A})[\mathbf{U}], \mathbf{g}(\mathbf{A})) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{f}(\mathbf{A}), \mathbf{g}(\mathbf{U})) + \boldsymbol{\pi}(\mathbf{f}(\mathbf{U}), \mathbf{g}(\mathbf{A})). \tag{33}$$

   a) Claramente $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\pi}(f(\mathbf{A}), \mathbf{g}(\mathbf{A}))$ si $\boldsymbol{\pi}(\alpha, \mathbf{A}) = \alpha\mathbf{A}$, $f(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}\mathbf{A}$ (en este caso f es escalar) y $\mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, y por lo tanto

$$D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{U} + (\operatorname{tr}\mathbf{U})\mathbf{A}. \tag{34}$$

   b) Aquí tenemos $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{f}(\mathbf{A}), \mathbf{g}(\mathbf{A}))$, con $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{AB}$ y $\mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, de donde se obtiene

$$D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{ABU} + \mathbf{UBA}. \tag{35}$$

   Análogamente:

   c) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \Rightarrow D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A}^T\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{A}$.

   d) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Au})\mathbf{A} \Rightarrow D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Au})\mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Uu})\mathbf{A}$. ■

2. **(Diferencial de la inversa $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$)** Consideremos $\mathbf{G}$, definida en el conjunto de los tensores invertibles por $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$. Suponiendo que $\mathbf{G}$ es diferenciable (lo es), probar que $D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}$.

Solución. Derivando la igualdad $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ y evaluando en $\mathbf{H}$ se obtiene

$$\mathbf{A}D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{H}] + \mathbf{H}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}, \tag{36}$$

de donde

$$D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}. \tag{37}$$

■

3. Sea, para $\mathbf{A}$ invertible, $\varphi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^2)$. Calcular $D\varphi(\mathbf{A})$.

Solución. Notemos que $\varphi = f \circ \mathbf{g}$ si definimos

$$f(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}, \tag{38}$$

Como

$$Df(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\det \mathbf{A})\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}) \quad (\text{si } \mathbf{A} \text{ es invertible}) \tag{39}$$

y

$$D\mathbf{g}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}, \tag{40}$$

se tiene

$$\begin{aligned} D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = Df(\mathbf{g}(\mathbf{A}))[D\mathbf{g}(\mathbf{A})[\mathbf{U}]] = Df(\mathbf{A}^2)[\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}] = \\ \det(\mathbf{A}^2)\,\mathrm{tr}\,[(\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-2}]. \end{aligned} \tag{41}$$

■

4. Sea $\varphi(\mathbf{v}) = \mathrm{e}^{\mathbf{v}^2}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Calcular $D\varphi(\mathbf{v})$.

Solución. Recordemos la notación $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. En este caso $\varphi = f \circ \mathbf{g}$ con $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^2$ y $f(t) = \mathrm{e}^t$. Claramente, $Dg(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $Df(t)[s] = s\mathrm{e}^t$, lo que nos da

$$D\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = Df(g(\mathbf{v}))[Dg(\mathbf{v})[\mathbf{u}]] = Df(\mathbf{v}^2)[2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}] = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathrm{e}^{\mathbf{v}^2}. \tag{42}$$

Luego $D\varphi(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}\mathrm{e}^{\mathbf{v}^2}$, en el sentido de que el vector $2\mathbf{v}\mathrm{e}^{\mathbf{v}^2}$ se identifica con la aplicación lineal $D\varphi(\mathbf{v}) : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. ■

5. Sea $\mathbf{G} : \mathrm{Lin} \to \mathrm{Lin}$ definida por $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{A}^T$, donde $\mathbf{K} : \mathrm{Lin} \to \mathrm{Lin}$ es diferenciable. Probar que si $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ es simétrico para todo $\mathbf{A}$ y si además $\mathbf{K}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, entonces $D\mathbf{K}(\mathbf{I})$ toma valores simétricos (i. e., $D\mathbf{K}(\mathbf{I})[\mathbf{H}] = (D\mathbf{K}(\mathbf{I})[\mathbf{H}])^T$ para todo $\mathbf{H} \in \mathrm{Lin}$).

Solución. Tenemos que demostrar que

$$(D\mathbf{K}(\mathbf{I})[\mathbf{H}])^T = D\mathbf{K}(\mathbf{I})[\mathbf{H}]. \tag{43}$$

Como $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{A}^T \in \mathrm{Sym}$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{K}(\mathbf{A}))^T = \mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{A}^T \quad \forall\ \mathbf{A} \in \mathrm{Lin}. \tag{44}$$

El ejercicio se resuelve derivando la expresión (44) y evaluando en $\mathbf{H}$. Para ello téngase en cuenta que la trasposición $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^T$ es lineal y que la aplicación $\mathbf{A} \to (\mathbf{K}(\mathbf{A}))^T$ es la composición de $\mathbf{K}$ con la trasposición; después se razona como en el ejercicio 1. El resultado es

$$\mathbf{A}(D\mathbf{K}(\mathbf{A})[\mathbf{H}])^T + \mathbf{H}(\mathbf{K}(\mathbf{A}))^T = \mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{H}^T + D\mathbf{K}(\mathbf{A})[\mathbf{H}]\mathbf{A}^T, \tag{45}$$

de donde a su vez se obtiene (43) eligiendo $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ya que $\mathbf{K}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$. ■

6. Sea $\mathbf{Q} : \mathbb{R} \to \mathrm{Orth}$ diferenciable. Probar que $\mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{Q}}(t)^T$ es antisimétrico para todo t.

Solución. Derivando $\mathbf{Q}(t)(\mathbf{Q}(t))^T = \mathbf{I}$ con respecto a t resulta

$$\mathbf{Q}(t)(\dot{\mathbf{Q}}(t))^T + \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T = \mathbf{0}, \tag{46}$$

de donde $[\mathbf{Q}(t)(\dot{\mathbf{Q}}(t))^T]^T = -\mathbf{Q}(t)(\dot{\mathbf{Q}}(t))^T$ o, equivalentemente, el tensor $\mathbf{Q}(t)(\dot{\mathbf{Q}}(t))^T$ es antisimétrico. ■

7. Supongamos que $\mathbf{G} : \mathrm{Lin} \to \mathrm{Lin}$ es diferenciable y que satisface la igualdad $\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{A})$ para todo $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$ y todo $\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}$. Probar que

$$\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{W}^T + \mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{A}) = D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{W}\mathbf{A}]$$

para todo $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$ y todo $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$.

Solución. Si $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$, $\mathrm{e}^{\mathbf{W}t} \in \mathrm{Orth}$. Entonces, por hipótesis,

$$\mathrm{e}^{\mathbf{W}t}\mathbf{G}(\mathbf{A})(\mathrm{e}^{\mathbf{W}t})^T = \mathbf{G}(\mathrm{e}^{\mathbf{W}t}\mathbf{A}). \tag{47}$$

Derivando (47) con respecto a t se obtiene

$$\mathrm{e}^{\mathbf{W}t}\mathbf{G}(\mathbf{A})(\mathbf{W}\mathrm{e}^{\mathbf{W}t})^T + \mathbf{W}\mathrm{e}^{\mathbf{W}t}\mathbf{G}(\mathbf{A})(\mathrm{e}^{\mathbf{W}t})^T = D\mathbf{G}(\mathrm{e}^{\mathbf{W}t}\mathbf{A})[\mathbf{W}\mathrm{e}^{\mathbf{W}t}\mathbf{A}]. \tag{48}$$

Ahora tómese $t = 0$ en (48). ■

8. En los apartados que siguen $\mathbf{S} : \mathrm{Lin} \to \mathrm{Lin}$ es regular.

   a) Se define $\mathbf{G} : \mathrm{Lin} \to \mathrm{Lin}$ como $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{A}_0 \in \mathrm{Lin}$. Probar que $D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \alpha D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\mathbf{U}]$ para todo $\mathbf{U} \in \mathrm{Lin}$.

   b) Se define $\varphi : \mathrm{Lin} \to \mathbb{R}$ como $\varphi(\mathbf{A}) = \int_0^1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})\, d\alpha$. Calcular $D\varphi$. (Puede derivarse bajo el signo integral.)

   c) Supongamos que $D\mathbf{S}(\mathbf{A})$ es simétrica para todo $\mathbf{A}$, en el sentido de que $\mathbf{B} \cdot D\mathbf{S}(\mathbf{A})[\mathbf{C}] = \mathbf{C} \cdot D\mathbf{S}(\mathbf{A})[\mathbf{B}]$ para todo par de tensores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$. Probar que $D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}$ para todo $\mathbf{U} \in \mathrm{Lin}$.

Solución.

a) $\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}) = (\mathbf{S} \circ \mathbf{f})(\mathbf{A})$, donde $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}$. Nótese que $\mathbf{f}$ es afín, y por lo tanto $D\mathbf{f}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \alpha\mathbf{U}$ (esto se deduce de la igualdad $\mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{U}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}) + \alpha\mathbf{U}$). Entonces

$$D\mathbf{G}(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (D\mathbf{S}(\mathbf{f}(\mathbf{A})) \circ D\mathbf{f}(\mathbf{A}))[\mathbf{U}] = \\ D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\alpha\mathbf{U}] = \alpha D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\mathbf{U}]. \tag{49}$$

b) Tenemos $\varphi(\mathbf{A}) = \int_0^1 \psi(\mathbf{A})\, d\alpha$, con $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})$, y sabemos que $D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \int_0^1 D\psi(\mathbf{A})[\mathbf{U}]\, d\alpha$. Usando la fórmula de derivación del producto y el apartado (a),

$$D\psi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A} \cdot (\alpha D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\mathbf{U}]) + \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}). \tag{50}$$

Ahora

$$D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \int_0^1 \{\mathbf{A} \cdot (\alpha D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\mathbf{U}]) + \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})\}\, d\alpha. \tag{51}$$

c) Si $\mathbf{B} \cdot D\mathbf{S}(\mathbf{A})[\mathbf{C}] = \mathbf{C} \cdot D\mathbf{S}(\mathbf{A})[\mathbf{B}]$ para todo $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, la fórmula (51) equivale a la siguiente:

$$D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \int_0^1 \mathbf{U} \cdot \{\alpha D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\mathbf{A}] + \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})\}\, d\alpha. \tag{52}$$

Compruébese que, si $g(\alpha) = \alpha\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}$, entonces

$$\frac{dg}{d\alpha}(\alpha) = \mathbf{U} \cdot \{\alpha D\mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})[\mathbf{A}] + \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A})\}. \tag{53}$$

Hecho eso, se llega a la solución

$$D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \int_0^1 \frac{dg}{d\alpha}(\alpha)\, d\alpha = g(1) - g(0) = \mathbf{S}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{U}. \tag{54}$$

■

9. Calcular las diferenciales de los invariantes principales $\imath_1,\ \imath_2,\ \imath_3 : \mathrm{Lin} \to \mathbb{R}$.

Solución.

a) $\imath_1(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}\mathbf{A}$ es lineal, de modo que $D\imath_1(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \imath_1(\mathbf{U}) = \operatorname{tr}\mathbf{U}$.

b) $\imath_2(\mathbf{A}) = (1/2)[(\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)]$. Defínanse $\varphi(\mathbf{A}) = (\operatorname{tr}\mathbf{A})^2$ y $\psi(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)$ y compruébese que

$$D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = 2(\operatorname{tr}\mathbf{A})(\operatorname{tr}\mathbf{U}) \text{ y } D\psi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}). \tag{55}$$

Entonces,

$$D\imath_2(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \frac{1}{2}[2(\operatorname{tr}\mathbf{A})(\operatorname{tr}\mathbf{U}) - \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A})]. \tag{56}$$

c) $\imath_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$. La diferencial, cuando $\mathbf{A}$ es invertible, está calculada en el libro [2]:

$$D\imath_3(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\det \mathbf{A})\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}). \tag{57}$$

Hacemos notar que $\imath_3$ es diferenciable para todo $\mathbf{A}$, y no solo para los $\mathbf{A}$ invertibles. La razón es que el determinante se obtiene a partir de los coeficientes de $\mathbf{A}$ mediante operaciones regulares. De hecho, puede comprobarse que (solo para matrices de orden 3; es decir, para todo tensor en el sentido de Gurtin)

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6}[2\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^3) - 3\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^2)\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) + (\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^3], \tag{58}$$

y por lo tanto

$$\begin{gathered} D\imath_3(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \frac{1}{6}\{2\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^2\mathbf{U} + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{A}^2) - \\ 3[\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^2)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{U} + \,\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A})\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}] + 3(\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A})^2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{U}\} \end{gathered} \tag{59}$$

para todo tensor $\mathbf{A}$. Se tiene así una prueba indirecta de que las expresiones en (57) y en (59) son iguales cuando $\mathbf{A}$ es invertible. ■

Nota *De (57) se deduce, por las propiedades de la traza (ver [2, p. 5]), que*

$$D\imath_3(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\det \mathbf{A})\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{A}^{-1}, \tag{60}$$

de donde

$$D\imath_3(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{U}, \tag{61}$$

y, en consecuencia, $D\imath_3(\mathbf{A})$ *se identifica con* $(\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}$ *cuando* $\mathbf{A}$ *es invertible.*

4. GRADIENTE. DIVERGENCIA. ROTACIONAL

1. Sean α, φ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{S}$ campos regulares (α y φ escalares; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectoriales; $\mathbf{S}$ tensorial). Dar expresiones para:

   a) $\nabla(\alpha\varphi)$,

   b) $\nabla[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}]$,

   c) $\mathrm{div}\,(\varphi\mathbf{S}\mathbf{v})$,

   d) $\Delta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (con $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de clase C^2).

SOLUCIÓN.

a) La componente i de $\nabla(\alpha\varphi)$ es (ver ejercicio 3)

$$[\nabla(\alpha\varphi)]_i = (\alpha\varphi)_{,i} = \alpha\varphi_{,i} + \alpha_{,i}\varphi = \alpha(\nabla\varphi)_i + (\nabla\alpha)_i\varphi, \tag{62}$$

de donde

$$\nabla(\alpha\varphi) = \alpha(\nabla\varphi) + (\nabla\alpha)\varphi. \tag{63}$$

b) Usando relaciones conocidas,

$$\begin{aligned}\nabla[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}] &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\otimes\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \\ &(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\otimes[(\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{v}].\end{aligned} \tag{64}$$

c) Análogamente,

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(\varphi\mathbf{S}\mathbf{v}) = \varphi\operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v}) + \mathbf{S}\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi = \\ &\varphi[\mathbf{S}^T\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{div}(\mathbf{S}^T)] + \mathbf{S}\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi.\end{aligned} \tag{65}$$

d) En este caso,

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \operatorname{div}[\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})] = \operatorname{div}[(\nabla\mathbf{w})^T\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{w}] = \\ (\nabla\mathbf{w})\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\operatorname{div}(\nabla\mathbf{w}) + (\nabla\mathbf{v})\cdot(\nabla\mathbf{w}) + \mathbf{w}\cdot\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v}) = \\ \mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot\Delta\mathbf{v} + 2(\nabla\mathbf{v})\cdot(\nabla\mathbf{w}).\end{aligned} \tag{66}$$

■

2. Probar que la divergencia de un campo tensorial **S** regular, div **S**, existe y es única.

SOLUCIÓN. div **S** es el único campo vectorial tal que

$$(\operatorname{div}\mathbf{S})\cdot\mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{a}) \quad \forall\, \mathbf{a}\in\mathcal{V}. \tag{67}$$

Ese campo vectorial existe y es único en virtud del teorema de representación de formas lineales, puesto que la aplicación

$$\mathbf{a}\in\mathcal{V}\to\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{a})\in\mathbb{R} \tag{68}$$

es lineal. ■

3. Probar que, para campos regulares φ (escalar), **v** (vectorial) y **S** (tensorial):

a) $(\nabla\varphi)_i = \varphi_{,i}$,
b) $(\nabla\mathbf{v})_{ij} = v_{i,j}$,
c) $\operatorname{div}\mathbf{v} = v_{i,i}$,
d) $(\operatorname{div}\mathbf{S})_i = S_{ij,j}$,
e) $\Delta\varphi = \varphi_{,ii}$ (aquí φ es de clase C^2),
f) $(\Delta\mathbf{v})_i = \Delta v_i$ (aquí **v** es de clase C^2).

SOLUCIÓN.

a) Como $\nabla\varphi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} = D\varphi(\mathbf{x})[\mathbf{u}]$ para todo $\mathbf{u}\in\mathcal{V}$,

$$(\nabla\varphi)_i = \nabla\varphi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{e}_i = D\varphi(\mathbf{x})[\mathbf{e}_i] = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}. \tag{69}$$

b) Como $\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} = D\mathbf{v}(\mathbf{x})[\mathbf{u}]$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$,

$$(\nabla\mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot D\mathbf{v}(\mathbf{x})[\mathbf{e}_j] = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}. \quad (70)$$

c) Usando el apartado anterior,

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v})_{ii} = v_{i,i}. \quad (71)$$

d) Teniendo en cuenta que $(\operatorname{div}\mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ y el apartado anterior,

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\mathbf{S})_i = (\operatorname{div}\mathbf{S}) \cdot \mathbf{e}_i = \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{e}_i) = \\ (\mathbf{S}^T\mathbf{e}_i)_{j,j} = (S_{kj}\delta_{ki})_{,j} = S_{ij,j}.\end{aligned} \quad (72)$$

e) El laplaciano de φ es, por los apartados (a) y (c),

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\nabla\varphi) = \varphi_{,ii}. \quad (73)$$

f) La componente i del laplaciano de $\mathbf{v}$ es

$$(\Delta\mathbf{v})_i = [\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v})]_i = (\nabla\mathbf{v})_{ij,j} = v_{i,jj} = \Delta v_i, \quad (74)$$

donde se han usado los apartados (b) y (d). ■

4. Probar que, si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos campos vectoriales regulares y $\mathbf{S}$ es un campo tensorial regular, se cumplen:

a) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{v}\ \operatorname{div}\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}$,

b) $\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{v}) = \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}\mathbf{S}$.

SOLUCIÓN.

a) $[\operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})]_i = (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{ij,j} = (v_i w_j)_{,j} = v_i w_{j,j} + v_{i,j} w_j = v_i\ \operatorname{div}\mathbf{w} + [(\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}]_i$.

b) $\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{v}) = (\mathbf{S}^T\mathbf{v})_{i,i} = [(\mathbf{S}^T)_{ij} v_j]_{,i} = (S_{ji} v_j)_{,i} = S_{ji} v_{j,i} + S_{ji,i} v_j = \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}\mathbf{S}$. ■

5. Sean φ y $\mathbf{v}$ de clase C^2. Probar que

a) $\operatorname{rot}\nabla\varphi = \mathbf{0}$,

b) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Sabiendo que $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$ (ver ejercicios complementarios), resulta $[\operatorname{rot}(\nabla\varphi)]_i = \varepsilon_{ijk}(\nabla\varphi)_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\varphi_{,kj} = \varepsilon_{ijk}\varphi_{,jk} = \varepsilon_{ikj}\varphi_{,kj} = -\varepsilon_{ijk}\varphi_{,kj} = -[\operatorname{rot}(\nabla\varphi)]_i$, ya que, al ser φ de clase C^2, $\varphi_{,kj} = \varphi_{,jk}$. Luego $[\operatorname{rot}(\nabla\varphi)]_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA. Nótese que el tensor $\nabla(\nabla\varphi)$ es simétrico, porque, teniendo en cuenta que φ de clase C^2,

$$[\nabla(\nabla\varphi)]_{ij} = (\nabla\varphi)_{i,j} = \varphi_{,ij} = \varphi_{,ji} = [\nabla(\nabla\varphi)]_{ji}. \qquad (75)$$

Entonces $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \mathbf{0}$, ya que $\operatorname{rot}(\nabla\varphi)$ es el vector axial de $\nabla(\nabla\varphi) - [\nabla(\nabla\varphi)]^T = \mathbf{0}$.

b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = (\operatorname{rot}\mathbf{v})_{i,i} = (\varepsilon_{ijk}v_{k,j})_{,i} = \varepsilon_{ijk}v_{k,ji} = \varepsilon_{ijk}v_{k,ij} = \varepsilon_{jik} v_{k,ji} = -\varepsilon_{ijk}v_{k,ji} = -(\operatorname{rot}\mathbf{v})_{i,i} = -\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v})$, ya que $v_{k,ji} = v_{k,ij}$ por ser $\mathbf{v}$ de clase C^2. Luego $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$. ∎

En los ejercicios 6, 7 y 8, $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{o}$.

6. *a*) Probar que $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}$.

   b) Sea $\mathbf{e} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Calcular $(\nabla\mathbf{e})\mathbf{e}$.

SOLUCIÓN.

a) De la definición de $\mathbf{r}$ se sigue que

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}+\mathbf{u}) = (\mathbf{x}+\mathbf{u}) - \mathbf{o} = (\mathbf{x}-\mathbf{o}) + \mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}, \qquad (76)$$

y por lo tanto $\nabla\mathbf{r}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$; es decir, $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}$.

b) Llamemos $r = |\mathbf{r}| = (x_1 + x_2 + x_3)^{\frac{1}{2}}$. Entonces $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$ y $\nabla\mathbf{e} = \nabla(\mathbf{r}/r) = (1/r)\nabla\mathbf{r} + \mathbf{r}\otimes\nabla(1/r)$. Sabemos que $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}$. Por otra parte,

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla[(x_1+x_2+x_3)^{-\frac{1}{2}}] = (-x_1,-x_2,-x_3)r^{-3} = \frac{-\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (77)$$

Según el cálculo anterior, $\nabla\mathbf{e} = \frac{1}{r}\mathbf{I} - \frac{1}{r^3}\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}$, y por lo tanto

$$(\nabla\mathbf{e})\mathbf{e} = \left(\frac{1}{r}\mathbf{I} - \frac{1}{r^3}\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\right)\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) =$$
$$\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{r^4}(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{r^4}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} = \mathbf{0}. \qquad (78)$$

∎

7. Sean $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{S} \in \operatorname{Lin}$, y definamos $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ como $\varphi = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{S}\mathbf{r})$. Calcular $\nabla\varphi$.

SOLUCIÓN. Como $\varphi = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{S}\mathbf{r}) = \mathbf{S}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$ (con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{S}$ constantes), se tiene que

$$\nabla\varphi = [\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{r})]^T\mathbf{S}\mathbf{r} + [\nabla(\mathbf{S}\mathbf{r})]^T(\mathbf{a}\times\mathbf{r}). \qquad (79)$$

Recordemos que si $W_{ij} = \varepsilon_{ikj} w_k$, entonces $\mathbf{W}$ es antisimétrico y $\mathbf{w}$ es su vector axial (ver ejercicios complementarios a la sección 1). Así pues, de la igualdad

$$\begin{aligned}\{[\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]^T\}_{ij} = [\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]_{ji} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_{j,i} = (\varepsilon_{jlm} a_l r_m)_{,i} = \\ \varepsilon_{jlm} a_l r_{m,i} = \varepsilon_{jlm} a_l \delta_{mi} = \varepsilon_{jli} a_l = -\varepsilon_{ilj} a_l \end{aligned} \tag{80}$$

se deduce que $[\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]^T$ es antisimétrico y $-\mathbf{a}$ es su vector axial.

Por otra parte, $[\nabla(\mathbf{Sr})]_{ij} = (\mathbf{Sr})_{i,j} = (S_{ik} r_k)_{,j} = S_{ik} r_{k,j} = S_{ik} \delta_{kj} = S_{ij}$, de modo que $\nabla(\mathbf{Sr}) = \mathbf{S}$.

Por último, de los cálculos anteriores y de (79) se obtiene

$$\nabla\varphi = (\mathbf{Sr}) \times \mathbf{a} + \mathbf{S}^T(\mathbf{a} \times \mathbf{r}). \tag{81}$$

■

8. Sea $\mathbf{u}$ el campo vectorial definido en $\mathcal{E} \setminus \{\mathbf{o}\}$ por la igualdad $\mathbf{u} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$. Probar que $\mathbf{u}$ es armónico. Encontrar un campo escalar cuyo gradiente sea $\mathbf{u}$.

SOLUCIÓN. Para ver que $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ es armónico tenemos que demostrar que $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$. (Recordemos la notación $r = |\mathbf{r}|$.) Ya se vio en el ejercicio 6 que $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Por inducción, se prueba que $\nabla\left(\frac{1}{r^n}\right) = -\frac{n\mathbf{r}}{r^{n+2}}$. También se probó que $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}$. Con esta información, y usando fórmulas conocidas para la derivación de productos,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{u}) = \operatorname{div}\left[\nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\right] = \operatorname{div}\left[\frac{1}{r^3}\nabla\mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] = \\ \operatorname{div}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{I} - \frac{3}{r^5}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r^3}\mathbf{I}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{3}{r^5}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\right) = \\ \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{3}{r^5}\operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) - (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\nabla\left(\frac{3}{r^5}\right) = \\ -\frac{3}{r^5}\mathbf{r} - \frac{3}{r^5}[\mathbf{r}\ \operatorname{div}\mathbf{r} + (\nabla\mathbf{r})\mathbf{r}] - (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\left(-\frac{15}{r^7}\mathbf{r}\right) = \\ -\frac{3}{r^5}\mathbf{r} - \frac{3}{r^5}(\mathbf{r}r_{i,i} + \mathbf{r}) + \frac{15}{r^7}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r}) = -\frac{3}{r^5}\mathbf{r} - \frac{12}{r^5}\mathbf{r} + \frac{15}{r^5}\mathbf{r} = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{82}$$

ya que $r_{i,i} = \delta_{ii} = 3$ y $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = r^2\mathbf{r}$.

Un campo escalar cuyo gradiente es $\mathbf{u}$ es $-1/r$. ■

9. Sea $\mathbf{u}$ un campo vectorial de clase C^2. Probar que

   a) $\operatorname{div}\{(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u}\} = \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^T + \mathbf{u} \cdot (\nabla \operatorname{div}\mathbf{u})$,

   b) $\nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^T = \operatorname{div}\{(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\} + (\operatorname{div}\mathbf{u})^2$.

SOLUCIÓN.

a) $\operatorname{div}[(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u}] = [(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u}]_{i,i} = [(\nabla\mathbf{u})_{ij}u_j]_{,i} = (u_{i,j}u_j)_{,i} = u_{i,j}u_{j,i} + u_{i,ji}u_j = \nabla\mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{u})^T + \mathbf{u}\cdot(\nabla\operatorname{div}\mathbf{u})$, ya que $(\nabla\operatorname{div}\mathbf{u})_j = (\operatorname{div}\mathbf{u})_{,j} = (u_{i,i})_{,j} = u_{i,ij} = u_{i,ji}$, por ser $\mathbf{u}$ de clase C^2.

b) $\operatorname{div}[(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}] = (\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \mathbf{u}\cdot(\nabla\operatorname{div}\mathbf{u})$, y se aplica el apartado (a).■

10. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ regulares. Probar que $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$.

SOLUCIÓN. $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_{i,i} = (\varepsilon_{ijk}u_jv_k)_{,i} = \varepsilon_{ijk}u_jv_{k,i} + \varepsilon_{ijk}u_{j,i}v_k$. Ahora veremos que $\varepsilon_{ijk}u_jv_{k,i} = -\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}$ y que $\varepsilon_{ijk}u_{j,i}v_k = \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}$, para lo cual se tendrá en cuenta que $(\operatorname{rot}\mathbf{u})_i = \varepsilon_{ijk}u_{k,j}$ (ver ejercicios complementarios). Se tienen, en efecto,

$$-\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = -\varepsilon_{ijk}u_iv_{k,j} = -\varepsilon_{jik}u_jv_{k,i} = \varepsilon_{ijk}u_jv_{k,i} \tag{83}$$

y

$$\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u} = \varepsilon_{ijk}u_{k,j}v_i = \varepsilon_{kij}u_{j,i}v_k = \varepsilon_{ijk}u_{j,i}v_k, \tag{84}$$

lo que resuelve el ejercicio. ■

Ejercicios complementarios

c.1. Demostrar que $(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(v_{k,j} - v_{j,k}) = \varepsilon_{ijk}v_{k,j}$, donde $\mathbf{v}$ es un campo vectorial regular.

SOLUCIÓN. Como $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ es el vector axial de $\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T$, la componente i de $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ es (ver ejercicios complementarios a la sección 1)

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T]_{jk} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(v_{j,k} - v_{k,j}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(v_{k,j} - v_{j,k}). \tag{85}$$

Puesto que $-\varepsilon_{ijk}v_{j,k} = -\varepsilon_{ikj}v_{k,j} = \varepsilon_{ijk}v_{k,j}$, también se tiene

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk}v_{k,j}. \tag{86}$$

■

c.2. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ regulares. Probar que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})\mathbf{u} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v}. \tag{87}$$

SOLUCIÓN. Se trata de usar las expresiones de las coordenadas del rotacional, el gradiente y la divergencia, más alguna propiedad de ε_{ijk} probada en los ejercicios complementarios a la sección 1:

$$\begin{aligned}
[\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]_i = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_{k,j} = \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{klm}u_l v_m)_{,j} = \\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}(u_l v_{m,j} + u_{l,j}v_m) = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(u_l v_{m,j} + u_{l,j}v_m) = \\
(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(u_l v_{m,j} + u_{l,j}v_m) = \\
\delta_{il}\delta_{jm}(u_l v_{m,j} + u_{l,j}v_m) - \delta_{im}\delta_{jl}(u_l v_{m,j} + u_{l,j}v_m) = \\
u_i v_{j,j} + u_{i,j}v_j - u_j v_{i,j} - u_{j,j}v_i = \\
[\mathbf{u}(\operatorname{div}\mathbf{v})]_i + [(\nabla\mathbf{u})\mathbf{v}]_i - [(\nabla\mathbf{v})\mathbf{u}]_i - [(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v}]_i.
\end{aligned} \tag{88}$$

■

5. TEOREMA DE LA DIVERGENCIA. TEOREMA DE STOKES

1. Sea $\mathcal{R}$ una región regular acotada, y sean $\mathbf{v},\ \mathbf{w} : \mathcal{R} \to \mathcal{V}$ y $\mathbf{S} : \mathcal{R} \to \mathrm{Lin}$ campos regulares. Demostrar que:

   a) $\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}\otimes\mathbf{n}\ dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla\mathbf{v}\ dV$,
   b) $\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{S}\mathbf{n})\otimes\mathbf{v}\ dA = \int_{\mathcal{R}} [(\operatorname{div}\mathbf{S})\otimes\mathbf{v} + \mathbf{S}(\nabla\mathbf{v})^T]\ dV$,
   c) $\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\mathbf{n}\ dA = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{v}\cdot\ \operatorname{div}\mathbf{S} + \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})\ dV$,
   d) $\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})\ dA = \int_{\mathcal{R}} [\mathbf{v}\ \operatorname{div}\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}]\ dV$.

Solución. Por el teorema de la divergencia sabemos que, para $i = 1, 2, 3$,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi n_i\ dA = \int_{\mathcal{R}} \varphi_{,i}\ dV. \tag{89}$$

El ejercicio se resuelve usando la fórmula (89).

a)

$$\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{v}\otimes\mathbf{n})_{ij}\ dA = \int_{\partial\mathcal{R}} v_i n_j\ dA = \int_{\mathcal{R}} v_{i,j}\ dV = \int_{\mathcal{R}} (\nabla\mathbf{v})_{ij}\ dV.$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{R}} [(\mathbf{S}\mathbf{n})\otimes\mathbf{v}]_{ij}\ dA = \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{S}\mathbf{n})_i v_j\ dA = \int_{\partial\mathcal{R}} S_{ik}n_k v_j\ dA = \\
\int_{\mathcal{R}} (S_{ik}v_j)_{,k}\ dV = \int_{\mathcal{R}} (S_{ik,k}v_j + S_{ik}v_{j,k})\ dV = \\
\int_{\mathcal{R}} [(\operatorname{div}\mathbf{S})_i v_j + S_{ik}(\nabla\mathbf{v})^T_{kj}]\ dV = \\
\int_{\mathcal{R}} [(\operatorname{div}\mathbf{S})\otimes\mathbf{v} + \mathbf{S}(\nabla\mathbf{v})^T]_{ij}\ dV.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\mathbf{n}\ dA = \int_{\partial\mathcal{R}} v_i S_{ij} n_j\ dA = \int_{\mathcal{R}} (v_i S_{ij})_{,j}\ dV = \\
\int_{\mathcal{R}} (v_i S_{ij,j} + v_{i,j}S_{ij})\ dV = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{v}\cdot\ \operatorname{div}\mathbf{S} + \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{S})\ dV.
\end{aligned}$$

d)

$$\int_{\partial\mathcal{R}} [\mathbf{v}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})]_i \; dA = \int_{\partial\mathcal{R}} v_i w_j n_j \; dA = \int_{\mathcal{R}} (v_i w_j)_{,j} \; dV =$$
$$\int_{\mathcal{R}} (v_i w_{j,j} + v_{i,j} w_j) \; dV = \int_{\mathcal{R}} [\mathbf{v} \; \operatorname{div}\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{w}]_i \; dV.$$

■

2. Sea $\mathbf{v}$ un campo vectorial regular definido en una región abierta $\mathcal{R}$. Probar que $\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; dA = 0$ para toda región regular *acotada* $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ si, y solo si, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Solución.

"⇒" Por el teorema de localización y el teorema de la divergencia,

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_\delta)} \int_{\Omega_\delta} \operatorname{div}\mathbf{v} \; dV =$$
$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_\delta)} \int_{\partial\Omega_\delta} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; dA = 0, \tag{90}$$

donde Ω_δ es la bola cerrada de centro $\mathbf{x}$ y radio δ.

"⇐" Por el teorema de la divergencia,

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; dA = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}\mathbf{v} \; dV = 0. \tag{91}$$

■

Ejercicios complementarios

c.1. Sea $\mathcal{R}$ una región regular acotada y sea $\mathbf{v} : \mathcal{R} \to \mathcal{V}$ un campo vectorial regular. Probar que

$$\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{n}\times\mathbf{v}) \; dA = \int_{\mathcal{R}} \operatorname{rot}\mathbf{v} \; dV.$$

Solución.

$$\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{n}\times\mathbf{v})_i \; dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \varepsilon_{ijk} n_j v_k \; dA = \int_{\mathcal{R}} \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \; dV = \int_{\mathcal{R}} (\operatorname{rot}\mathbf{v})_i \; dV. \tag{92}$$

■

Capítulo III

Cinemática

6. CUERPOS. DEFORMACIONES

1. Probar:

   a) Dados un vector $\mathbf{q}$ y un tensor $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+$, hay exactamente una deformación homogénea $\mathbf{f}$ tal que $\nabla\mathbf{f} = \mathbf{F}$ y que deja $\mathbf{q}$ fijo (i. e., $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$).

   b) Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son deformaciones homogéneas, entonces también lo es $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$, y $\nabla(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}) = (\nabla\mathbf{f})(\nabla\mathbf{g})$. Además, si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ dejan $\mathbf{q}$ fijo, también lo deja $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$.

   Solución.

   a) Si $\mathbf{f}$ es una deformación homogénea, entonces $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \nabla\mathbf{f}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$. Luego la única deformación homogénea tal que $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ y $\nabla\mathbf{f} = \mathbf{F}$ es $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} + \mathbf{F}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$.

   b) Por la regla de la cadena, $\nabla(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{p}) = \nabla\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{p})) \circ \nabla\mathbf{g}(\mathbf{p})$. Como $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son deformaciones homogéneas, sus gradientes son constantes, y por lo tanto también el gradiente de $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ es constante: $\nabla(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}) = (\nabla\mathbf{f})\circ(\nabla\mathbf{g})$. Además, si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{q}$ dejan fijo el punto $\mathbf{q}$, también lo deja fijo $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$. ■

2. Una deformación homogénea de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \gamma p_2, \\ x_2 &= p_2, \\ x_3 &= p_3 \end{aligned}$$

   se llama un *corte puro* (“pure shear” en inglés). Para esta deformación calcular:

   a) las matrices de $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{B}$;

   b) la lista de los invariantes principales de $\mathbf{C}$ (o de $\mathbf{B}$);

   c) los estiramientos principales.

SOLUCIÓN.

a) El gradiente de la deformación es

$$\mathbf{F} = \nabla\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

El tensor de deformación de Cauchy–Green a la derecha es $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{94}$$

El tensor de deformación de Cauchy–Green a la izquierda es $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{95}$$

b) Operando, se obtiene $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + (3+\gamma^2)\lambda^2 - (3+\gamma^2)\lambda + 1$, de modo que la lista de invariantes principales de $\mathbf{C}$ (o de $\mathbf{B}$) es

$$\mathcal{I}_{\mathbf{C}} = (3+\gamma^2, 3+\gamma^2, 1). \tag{96}$$

c) Los estiramientos principales son los autovalores de $\mathbf{U}$. Como $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$, los estiramientos principales son, en virtud del teorema de la raíz cuadrada,

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}, \quad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3}, \tag{97}$$

donde los λ_i son los autovalores de $\mathbf{C}$. Ahora se comprueba, resolviendo la ecuación característica $\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, que

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{2+\gamma^2+2\gamma\sqrt{1+\gamma^2}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{2+\gamma^2-2\gamma\sqrt{1+\gamma^2}}{2}. \tag{98}$$

■

3. Calcular $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ e $\mathcal{I}_{\mathbf{C}}$ para una extensión de magnitud λ en la dirección $\mathbf{e}$.

SOLUCIÓN. Si $\mathbf{f}$ es una extensión de magnitud λ en la dirección $\mathbf{e}$, entonces, en una base ortonormal de autovectores con $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$, $\nabla\mathbf{f} = \mathbf{U} = \mathrm{diag}(\lambda, 1, 1)$, y por lo tanto

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{U}^2 = \mathrm{diag}(\lambda^2, 1, 1). \tag{99}$$

La lista $\mathcal{I}_{\mathbf{C}}$ de los invariantes principales de $\mathbf{C}$ es, llamando $\omega_1 = \lambda^2$, $\omega_2 = \omega_3 = 1$ a los autovalores de $\mathbf{C}$,

$$\imath_1(\mathbf{C}) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2 + \lambda^2 = \mathrm{tr}\,\mathbf{C}, \tag{100}$$

$$\imath_2(\mathbf{C}) = \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 = 1 + 2\lambda^2, \tag{101}$$

$$\imath_3(\mathbf{C}) = \omega_1\omega_2\omega_3 = \lambda^2 = \det\mathbf{C}. \tag{102}$$

■

4. Probar que una deformación es isocórica si, y solo si, $\det \mathbf{C} = 1$.

   Solución. Una deformación $\mathbf{F}$ es isocórica si, y solo si, $\det \mathbf{F}(\mathbf{p}) = 1$ para todo $\mathbf{p}$. Como $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$, $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2$, de donde se deduce, teniendo en cuenta que $\det \mathbf{F} > 0$, que $\det \mathbf{F} = 1 \Leftrightarrow \det \mathbf{C} = 1$. ■

5. Demostrar que $\mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es el vector desplazamiento.

   Solución. $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, ya que $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$. Entonces $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = (\mathbf{I} + (\nabla\mathbf{u})^T)(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u})$. ■

6. Probar que una deformación es rígida si, y solo si, $\mathcal{I}_{\mathbf{C}} = (3, 3, 1)$.

   Solución. Según el teorema de caracterización de las deformaciones rígidas, una deformación es rígida si, y solo si, $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ es una rotación para todo $\mathbf{p}$.

   "$\Rightarrow$" Si $\mathbf{f}$ es una deformación rígida $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ es una rotación para todo $\mathbf{p}$, y por lo tanto $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{I}$. Entonces, los autovalores de $\mathbf{C}$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, y los invariantes principales son $\imath_1(\mathbf{C}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$, $\imath_2(\mathbf{C}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3$, $\imath_3(\mathbf{C}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

   "$\Leftarrow$" Supongamos que $\mathcal{I}_{\mathbf{C}} = (3, 3, 1)$. Los invariantes principales son los coeficientes del polinomio característico, por lo que $\mathbf{C}$ tiene los mismos autovalores que $\mathbf{I}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Como $\mathbf{C}$ es diagonalizable (porque es simétrica), necesariamente $\mathbf{C} = \mathbf{I}$. Entonces $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ es una rotación para todo $\mathbf{p}$, ya que $\det \mathbf{F}(\mathbf{p}) > 0$ y $(\mathbf{F}(\mathbf{p}))^T\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{C} = \mathbf{I}$. ■

7. Demostrar que los invariantes principales de $\mathbf{C}$ son

$$
\begin{aligned}
\imath_1(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\
\imath_2(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2, \\
\imath_3(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2,
\end{aligned}
$$

   donde λ_1, λ_2 y λ_3 son los estiramientos principales.

   Solución. Es claro, ya que los λ_i^2 son los autovalores de $\mathbf{C}$. En efecto, los estiramientos principales λ_i son los autovalores de $\mathbf{U}$, y $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$, con $\mathbf{U}$ y $\mathbf{C}$ simétricas definidas positivas (ver teorema de la raíz cuadrada). ■

8. Una deformación de la forma

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(p_1, p_2), \\
x_2 &= f_2(p_1, p_2), \\
x_3 &= p_3
\end{aligned}
$$

se llama *deformación plana* ("plane strain"). Probar que para una tal deformación el estiramiento principal λ_3 (en la dirección p_3) es la unidad. Probar también que la deformación es isocórica si, y solo si, los otros dos estiramientos principales, λ_α y λ_β, satisfacen $\lambda_\alpha = 1/\lambda_\beta$.

SOLUCIÓN. De nuevo se usa el hecho de que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{U}$ son simétricas definidas positivas y que $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$. Según el teorema de la raíz cuadrada, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ es el espectro de $\mathbf{U}$ si, y solo si, $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2\}$ es el espectro de $\mathbf{C}$; además, λ_i está asociado al mismo autovector que λ_i^2.

Como

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \nabla\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & 0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{103}$$

la tercera columna de $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ es $\mathbf{e}_3$, lo cual implica que

$$\mathbf{C}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3. \tag{104}$$

La ecuación (104) nos dice que $\mathbf{e}_3$ es un autovector de $\mathbf{C}$, asociado al autovalor 1. Por la discusión precedente, 1 es un autovalor de $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$, y un autovector asociado es $\mathbf{e}_3$ o, lo que es lo mismo, el estiramiento principal de $\mathbf{f}$ en la dirección p_3 es 1.

Ahora, por el ejercicio 4 sabemos que $\mathbf{f}$ es isocórica si, y solo si, $\det \mathbf{C} = 1$. Pero, teniendo en cuenta que $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$,

$$\det \mathbf{C} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = 1, \tag{105}$$

en caso de que llamemos λ_3 al autovalor 1. ■

9. Supongamos que $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ son dos deformaciones de $\mathcal{B}$ con el mismo tensor de Cauchy–Green a la derecha. Demostrar que existe una deformación rígida $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{f}_2 = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}_1$.

SOLUCIÓN. Veremos que $\mathbf{g} = \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1^{-1}$ es una deformación rígida. Usamos las notaciones habituales $\mathbf{F}_i$ para $\nabla\mathbf{f}_i$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{R}_i\mathbf{U}_i$ para la descomposición polar a la derecha de $\mathbf{F}_i$. Nótese que, como $(\mathbf{f}_1^{-1} \circ \mathbf{f}_1)(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, se tiene $\nabla(\mathbf{f}_1^{-1})(\mathbf{f}_1(\mathbf{p})) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{p}))^{-1}$.

La aplicación $\mathbf{g} = \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1^{-1} : \mathbf{f}_1(\mathcal{B}) \to \mathbf{f}_2(\mathcal{B})$ es una deformación, porque es una composición de deformaciones. Sea $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}) \in \mathbf{f}_1(\mathcal{B})$. Entonces

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \nabla\mathbf{f}_2(\mathbf{p}) \circ \nabla(\mathbf{f}_1^{-1})(\mathbf{f}_1(\mathbf{p})) = \mathbf{F}_2(\mathbf{p})(\mathbf{F}_1(\mathbf{p}))^{-1} = \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{p})\mathbf{U}_2(\mathbf{p})(\mathbf{U}_1(\mathbf{p}))^{-1}(\mathbf{R}_1(\mathbf{p}))^{-1}.\end{aligned} \tag{106}$$

Por hipótesis, $\mathbf{C}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{p})$, de modo que $\mathbf{U}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{U}_2(\mathbf{p})$, y entonces (106) implica

$$\nabla\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_2(\mathbf{p})(\mathbf{R}_1(\mathbf{p}))^{-1} = \mathbf{R}_2(\mathbf{p})(\mathbf{R}_1(\mathbf{p}))^T. \tag{107}$$

Así, hemos visto que $\nabla\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es una rotación para todo $\mathbf{q}$, lo cual equivale a decir que $\mathbf{g}$ es una deformación rígida, según el teorema de caracterización de las deformaciones rígidas. ■

10. Probar las siguientes igualdades:

a)
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})\ dA_{\mathbf{p}},$$

b)
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})\ dA_{\mathbf{p}},$$

c)
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} =$$
$$\int_{\partial \mathcal{P}} (\mathbf{f}(\mathbf{p}) - \mathbf{o}) \times \mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})\ dA_{\mathbf{p}}.$$

Aquí $\mathbf{v}$ y $\mathbf{T}$ son campos continuos en $\mathbf{f}(\mathcal{B})$, con $\mathbf{v}$ vectorial y $\mathbf{T}$ tensorial.

Solución. Sabemos que, si φ es un campo escalar continuo en $\mathbf{f}(\mathcal{B})$, entonces, para $i = 1, 2, 3$,

$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \varphi(\mathbf{x})\ m_i(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} = \int_{\partial \mathcal{P}} \varphi(\mathbf{f}(\mathbf{p}))(\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}))_i\ dA_{\mathbf{p}}. \tag{108}$$

Usaremos la igualdad (108) para resolver el ejercicio.

a)
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} = \int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} v_i(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} =$$
$$\int_{\partial \mathcal{P}} v_i(\mathbf{f}(\mathbf{p}))(\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}))_i\ dA_{\mathbf{p}} = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})\ dA_{\mathbf{p}}. \tag{109}$$

b)
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} (\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x}))_i\ dA_{\mathbf{x}} = \int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} T_{ij}(\mathbf{x}) m_j(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} =$$
$$\int_{\partial \mathcal{P}} T_{ij}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))(\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}))_j\ dA_{\mathbf{p}} = \int_{\partial \mathcal{P}} [\mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})]_i\ dA_{\mathbf{p}}. \tag{110}$$

c)
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} [(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x})]_i\ dA_{\mathbf{x}} =$$
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{x} - \mathbf{o})_j (\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x}))_k\ dA_{\mathbf{x}} =$$
$$\int_{\partial \mathbf{f}(\mathcal{P})} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{x} - \mathbf{o})_j T_{kl}(\mathbf{x}) m_l(\mathbf{x})\ dA_{\mathbf{x}} =$$
$$\int_{\partial \mathcal{P}} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{f}(\mathbf{p}) - \mathbf{o})_j T_{kl}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))(\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}))_l\ dA_{\mathbf{p}} =$$

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{f}(\mathbf{p})-\mathbf{o})_j[\mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})]_k \, dA_{\mathbf{p}} = \int_{\partial\mathcal{P}} [(\mathbf{f}(\mathbf{p})-\mathbf{o}) \times \mathbf{T}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))\mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})]_i \, dA_{\mathbf{p}}. \tag{111}$$

■

11. Sea $\mathbf{f}$ una deformación de $\mathcal{B}$. Sea $\mathbf{p} \in \mathring{\mathcal{B}}$ y sean $\mathbf{d}$ y $\mathbf{e}$ dos vectores unitarios. Se consideran las áreas $\Delta A_{\mathbf{p}}$ (en $\mathcal{B}$) generada por los vectores $\alpha\mathbf{d}$ y $\alpha\mathbf{e}$ cuando su origen se sitúa en $\mathbf{p}$, y $\Delta A_{\mathbf{x}}$ (en $\mathbf{f}(\mathcal{B})$) generada por $\mathbf{d}_\alpha$ y $\mathbf{e}_\alpha$, donde $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{p}+\alpha\mathbf{d}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})$ y $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{p}+\alpha\mathbf{e}) - \mathbf{f}(\mathbf{p})$. Es claro que $\Delta A_{\mathbf{p}} = |\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|$ y $\Delta A_{\mathbf{x}} = |\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha|$. Defínase

$$\frac{dA_{\mathbf{x}}}{dA_{\mathbf{p}}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{|\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha|}{|\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|}.$$

Se pide que, usando la identidad $(\mathbf{S}\mathbf{a}) \times (\mathbf{S}\mathbf{b}) = (\det \mathbf{S})\mathbf{S}^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, se demuestre la igualdad

$$\mathbf{m}(\mathbf{x})\frac{dA_{\mathbf{x}}}{dA_{\mathbf{p}}} = \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}),$$

donde $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = (\det \mathbf{F}(\mathbf{p}))(\mathbf{F}(\mathbf{p}))^{-T}$ y $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ son las normales unitarias

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha|},$$
$$\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{e}|}.$$

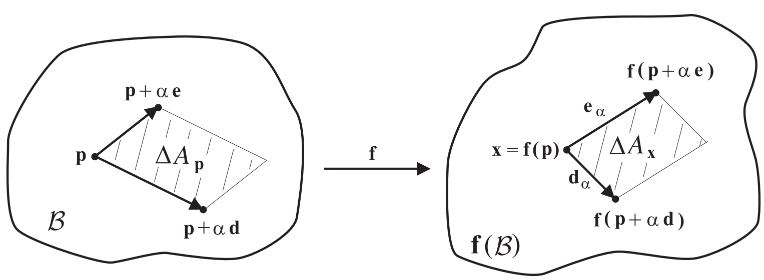


Figura III.1: Efecto de la deformación.

Solución. Como $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \nabla\mathbf{f}(\mathbf{p})$, sabemos que

$$\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{p}+\alpha\mathbf{d}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p})(\alpha\mathbf{d}) + \mathbf{o}(\alpha) = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{p})\mathbf{d} + \mathbf{o}(\alpha), \tag{112}$$

y, análogamente, $\mathbf{e}_\alpha = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{p})\mathbf{e} + \mathbf{o}(\alpha)$.

Para abreviar, escribiremos $\mathbf{d}_\alpha = \alpha\mathbf{F}\mathbf{d} + \mathbf{o}(\alpha)$ y $\mathbf{e}_\alpha = \alpha\mathbf{F}\mathbf{e} + \mathbf{o}(\alpha)$. Queremos probar que $\mathbf{m}(\mathbf{x})(dA_{\mathbf{x}}/dA_{\mathbf{p}}) = \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p})$. Puesto que

$$\mathbf{m}(\mathbf{x})\frac{dA_{\mathbf{x}}}{dA_{\mathbf{p}}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha|} \frac{|\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha|}{|\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha}{|\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|}, \tag{113}$$

se trata de demostrar que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha}{|\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|} = \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}). \tag{114}$$

En efecto,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathbf{d}_\alpha \times \mathbf{e}_\alpha}{|\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{(\alpha\mathbf{F}\mathbf{d} + \mathbf{o}(\alpha)) \times (\alpha\mathbf{F}\mathbf{e} + \mathbf{o}(\alpha))}{|\alpha\mathbf{d} \times \alpha\mathbf{e}|} =$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha^2(\mathbf{F}\mathbf{d} \times \mathbf{F}\mathbf{e}) + \alpha\mathbf{F}\mathbf{d} \times \mathbf{o}(\alpha) + \mathbf{o}(\alpha) \times \alpha\mathbf{F}\mathbf{e} + \mathbf{o}(\alpha) \times \mathbf{o}(\alpha)}{\alpha^2|\mathbf{d} \times \mathbf{e}|} =$$

$$\frac{\mathbf{F}\mathbf{d} \times \mathbf{F}\mathbf{e}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{e}|} = (\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{e}|} = \mathbf{G}(\mathbf{p})\mathbf{n}(\mathbf{p}). \tag{115}$$

La penúltima igualdad se deduce de la siguiente, cierta para todo tensor $\mathbf{S}$ invertible y todo par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$: $(\mathbf{S}\mathbf{a}) \times (\mathbf{S}\mathbf{b}) = (\det\mathbf{S})\mathbf{S}^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (ver ejercicios complementarios). ■

12. Probar que, si $\mathbf{f}$ es una deformación de $\mathcal{B}$,

    a) $\mathbf{f}(\mathring{\mathcal{B}}) = (\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ$,
    b) $\mathbf{f}(\partial\mathcal{B}) = \partial\mathbf{f}(\mathcal{B})$.

Solución.

a) Como $\mathbf{f}^{-1}$ es continua, $\mathbf{f}$ es abierta (lleva abiertos en abiertos), y por lo tanto $\mathbf{f}(\mathring{\mathcal{B}})$ es abierto. Además, es claro que $\mathbf{f}(\mathring{\mathcal{B}}) \subset \mathbf{f}(\mathcal{B})$, por todo lo cual $\mathbf{f}(\mathring{\mathcal{B}}) \subset (\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ$. Análogamente, como $\mathbf{f}^{-1}[(\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ]$ es abierto y está contenido en $\mathcal{B}$, se tiene que $\mathbf{f}^{-1}[(\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ] \subset \mathring{\mathcal{B}}$ o, lo que es lo mismo, $(\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ \subset \mathbf{f}(\mathring{\mathcal{B}})$.

b) Por definición de cuerpo y de deformación, $\mathcal{B}$ y $\mathbf{f}(\mathcal{B})$ son cerrados. Entonces $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}} = \mathring{\mathcal{B}} \cup \partial\mathcal{B}$ y $\mathbf{f}(\mathcal{B}) = \overline{\mathbf{f}(\mathcal{B})} = (\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ \cup \partial\mathbf{f}(\mathcal{B})$, donde las uniones son disjuntas. Como $\mathbf{f}(\mathring{\mathcal{B}}) = (\mathbf{f}(\mathcal{B}))^\circ$, necesariamente $\mathbf{f}(\partial\mathcal{B}) = \partial\mathbf{f}(\mathcal{B})$. ■

13. Sea $\mathcal{B}$ el semiespacio cerrado $\mathcal{B} = \{\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) :\ 0 \le p_1 < \infty\}$, y sea $\mathbf{f}$ definida en $\mathcal{B}$ por las igualdades

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{p_1 + 1}, \\ x_2 &= p_2, \\ x_3 &= p_3. \end{aligned}$$

Se pide:

a) Comprobar que $\mathbf{f}$ es inyectiva y que $\det \nabla\mathbf{f} > 0$.

b) Determinar $\mathbf{f}(\mathcal{B})$ y usar el resultado para demostrar que $\mathbf{f}$ *no* es una deformación.

c) Probar que no se satisface $\mathbf{f}(\partial\mathcal{B}) = \partial\mathbf{f}(\mathcal{B})$.

Solución.

a) $\mathbf{f}$ es inyectiva, ya que $-\frac{1}{p_1+1} = -\frac{1}{q_1+1}$ implica $p_1 = q_1$. Además, $\det\nabla\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(p_1+1)^2} > 0$ para todo $p_1 \geq 0$.

b) Consideremos la aplicación $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(p_1) = -\frac{1}{p_1+1}$. Teniendo en cuenta que $h'(p_1) = \frac{1}{(p_1+1)^2} > 0$, $\lim_{p_1\to\infty} h(p_1) = 0$ y $h(0) = -1$, se llega a que $h[0,\infty) = [-1,0)$, y en consecuencia $\mathbf{f}(\mathcal{B}) = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) :\ x_1 \in [-1,0)\}$. Como $\mathbf{f}(\mathcal{B})$ no es cerrado, $\mathbf{f}$ no es una deformación.

c) $\mathbf{f}(\partial\mathcal{B}) \neq \partial\mathbf{f}(\mathcal{B})$, ya que $\mathbf{f}(\partial\mathcal{B}) = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) :\ x_1 = -1\}$ y $\partial\mathbf{f}(\mathcal{B}) = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) :\ x_1 \in \{-1,0\}\}$. ■

Ejercicios complementarios

c.1. Probar que $\mathbf{S}^T[(\mathbf{Sa})\times(\mathbf{Sb})] = (\det\mathbf{S})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ para todo tensor $\mathbf{S}$ y todo par de vectores $\mathbf{a},\mathbf{b}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{S}^T[(\mathbf{Sa})\times(\mathbf{Sb})]\right)_i &= S_{ji}\varepsilon_{jkl}(\mathbf{Sa})_k(\mathbf{Sb})_l = \\ S_{ji}\varepsilon_{jkl}S_{km}a_mS_{ln}b_n &= \varepsilon_{jkl}S_{ji}S_{km}S_{ln}a_mb_n = \\ (\det\mathbf{S})\varepsilon_{imn}a_mb_n &= (\det\mathbf{S})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i,\end{aligned} \tag{116}$$

puesto que $\varepsilon_{jkl}S_{ji}S_{km}S_{ln} = (\det\mathbf{S})\varepsilon_{imn}$ (ver ejercicios complementarios a la sección 1). ■

7. PEQUEÑAS DEFORMACIONES

1. Sea $\{\mathbf{f}_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ una familia de deformaciones con $|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon| = \varepsilon$. Probar:

a) $\mathbf{E}_\varepsilon = \mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{I} + \mathbf{o}(\varepsilon) = \mathbf{V}_\varepsilon - \mathbf{I} + \mathbf{o}(\varepsilon)$,

b) $\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1 = \operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon + o(\varepsilon)$.

Dar una interpretación física de $\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1$ en términos del cambio de volumen debido a la deformación $\mathbf{f}_\varepsilon$.

Solución.

a) Recordemos que $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ es el vector desplazamiento, que el tensor de deformación de Cauchy–Green a la derecha $\mathbf{C}$ satisface $\mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u}$, que el tensor de estiramiento a la derecha es $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$, y que la deformación infinitesimal es $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$, la parte simétrica de $\nabla\mathbf{u}$.

Consideremos las aplicaciones

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{S}) = (\mathbf{I} + \mathbf{S}^T)(\mathbf{I} + \mathbf{S}) = \mathbf{I} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^T + \mathbf{S}^T\mathbf{S} \tag{117}$$

y

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{S}) = \sqrt{\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{S})}, \tag{118}$$

donde $\mathbf{S} \in \mathrm{Lin}$. Se deja como ejercicio la comprobación de que $\hat{\mathbf{C}}$ es diferenciable en $\mathbf{0}$, que $D\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{0})[\mathbf{H}] = \mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ para todo $\mathbf{H} \in \mathrm{Lin}$, y que, en un entorno de $\mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{S}) \in \mathrm{Psym}$, lo que hace que $\hat{\mathbf{U}}$ esté bien definida en ese entorno. Como $\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{S}) = (\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{S}))^2$ y $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$, se tiene que $D\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0})[\mathbf{H}] = (1/2)D\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{0})[\mathbf{H}] = (1/2)(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$, con lo cual

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{H}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \mathbf{o}(\mathbf{H}). \tag{119}$$

Tomando $\mathbf{H} = \nabla\mathbf{u}_\varepsilon$, obtenemos $\mathbf{U}_\varepsilon = \mathbf{I} + \mathbf{E}_\varepsilon + \mathbf{o}(\varepsilon)$, como queríamos ver.

De forma análoga se demuestra que $\mathbf{E}_\varepsilon = \mathbf{V}_\varepsilon - \mathbf{I} + \mathbf{o}(\varepsilon)$.

b) Recordemos que si $\varphi(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}$, entonces, para todo tensor $\mathbf{U}$, $D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\det\mathbf{A})\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1})$ (cuando $\mathbf{A}$ es invertible). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\det\mathbf{F}_\varepsilon = \det(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}_\varepsilon) = \varphi(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}_\varepsilon) = \\ \varphi(\mathbf{I}) + D\varphi(\mathbf{I})[\nabla\mathbf{u}_\varepsilon] + \mathbf{o}(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon) = 1 + \mathrm{tr}\,\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{o}(\varepsilon),\end{aligned} \tag{120}$$

de donde se concluye que $\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1 = \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{o}(\varepsilon)$, ya que $\mathrm{tr}\,\nabla\mathbf{u}_\varepsilon = \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\varepsilon$.

Interpretación física de $\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1$: Recordemos que si $\mathcal{P}$ es una parte de $\mathcal{B}$, entonces $\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} dV$ y $\mathrm{vol}(\mathbf{f}_\varepsilon(\mathcal{P})) = \int_{\mathcal{P}} \det\mathbf{F}_\varepsilon\, dV$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{P}} (\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1)\, dV = \mathrm{vol}(\mathbf{f}_\varepsilon(\mathcal{P})) - \mathrm{vol}(\mathcal{P}) \tag{121}$$

expresa la diferencia entre el volumen después de la deformación y el volumen antes de la deformación. Ahora, por el teorema de localización se tiene, para $\mathbf{p} \in \mathring{\mathcal{B}}$,

$$\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1 = \lim_{\delta\to 0} \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{f}_\varepsilon(\Omega_\delta)) - \mathrm{vol}(\Omega_\delta)}{\mathrm{vol}(\Omega_\delta)}, \tag{122}$$

donde Ω_δ es la bola cerrada de centro $\mathbf{p}$ y radio δ. Así pues, $\det\mathbf{F}_\varepsilon - 1$ indica la variación de volumen debida a la deformación, por unidad de volumen antes de la deformación. Según esta discusión, el apartado (b) nos dice que $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_\varepsilon$ es una medida de la variación de volumen debida a la deformación, con un error $o(\varepsilon)$ si $|\nabla\mathbf{u}_\varepsilon| = \varepsilon$. ■

2. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ campos de vectores regulares en $\mathcal{B}$, y supongamos que las deformaciones infinitesimales asociadas a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$ son iguales. Probar que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es un desplazamiento rígido infinitesimal.

SOLUCIÓN. Por hipótesis, $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(\mathbf{v})$, donde $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$. Entonces, como $\mathbf{E}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}(\mathbf{v})$, se tiene $\mathbf{E}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ en todo punto, lo que prueba que $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ es un desplazamiento rígido infinitesimal (ver teorema de caracterización de los desplazamientos rígidos infinitesimales). ∎

En los siguientes ejercicios, $\mathbf{u}$ *es un campo vectorial regular en* $\mathcal{B}$ *y* $\mathbf{E}$ *es la correspondiente deformación infinitesimal. Además, en los ejercicios 3 y 5,* $\mathcal{B}$ *es acotado.*

3. Se define la *deformación media* $\overline{\mathbf{E}}$ mediante la igualdad

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B})\overline{\mathbf{E}} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{E}\; dV.$$

Probar que

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B})\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{u}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\; dA,$$

de manera que $\overline{\mathbf{E}}$ depende de $\mathbf{u}$ solamente a través de los valores de $\mathbf{u}$ en la frontera de $\mathcal{B}$. Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior unitaria en $\partial\mathcal{B}$.

SOLUCIÓN. Recordemos que $\int_{\mathcal{B}} \nabla\mathbf{u}\; dV = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{u}\otimes\mathbf{n}\; dA$ (ver ejercicio 5.1). Entonces

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B})\overline{\mathbf{E}} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{E}\; dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\; dV =$$
$$\frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{u}\otimes\mathbf{n} + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{n})^T)\; dA = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{u}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\; dA, \qquad (123)$$

como se quería demostrar. ∎

4. Sea $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T)$. Probar:

   a) $|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{W}|^2 = |\nabla\mathbf{u}|^2$,

   b) $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{W}|^2 = \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}^T$.

SOLUCIÓN. Teniendo en cuenta que $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^T)$ y operando se llega a

$$|\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2}(|\nabla\mathbf{u}|^2 + \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}^T). \qquad (124)$$

Análogamente,

$$|\mathbf{W}|^2 = \frac{1}{2}(|\nabla\mathbf{u}|^2 - \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}^T). \qquad (125)$$

Por lo tanto, $|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{W}|^2 = |\nabla\mathbf{u}|^2$ y $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{W}|^2 = \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}^T$. ∎

5. **(Desigualdad de Korn)** Sea $\mathbf{u}$ de clase C^2 y supóngase que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathcal{B}$. Probar que
$$\int_{\mathcal{B}} |\nabla\mathbf{u}|^2 \; dV \leq 2 \int_{\mathcal{B}} |\mathbf{E}|^2 \; dV.$$

Solución. Por el ejercicio 4 sabemos que
$$2|\mathbf{E}|^2 = |\nabla\mathbf{u}|^2 + \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^T. \tag{126}$$
Entonces la desigualdad de Korn equivale a esta otra, que demostraremos: $\int_{\mathcal{B}} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^T \; dV \geq 0$. Puesto que $\mathbf{u}$ es de clase C^2 se tiene, en virtud del ejercicio 4.9, que $\nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^T = \operatorname{div}\{(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\} + (\operatorname{div}\mathbf{u})^2$, con lo cual
$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}^T \; dV &= \\
\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}\{(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\} \; dV + \int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div}\mathbf{u})^2 \; dV &= \\
\int_{\partial\mathcal{B}} [(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \; dA + \int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div}\mathbf{u})^2 \; dV &= \\
\int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div}\mathbf{u})^2 \; dV &\geq 0,
\end{aligned} \tag{127}$$
donde se han usado el teorema de la divergencia y el hecho de que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathcal{B}$. ■

6. Como siempre, x_1, x_2 y x_3 son las coordenadas cartesianas de $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ y p_1, p_2 y p_3 las de $\mathbf{p}$. Consideremos la deformación definida en coordenadas cilíndricas
$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta, & p_1 &= R\cos\Theta,\\
x_2 &= r\operatorname{sen}\theta, & p_2 &= R\operatorname{sen}\Theta,\\
x_3 &= z, & p_3 &= Z,
\end{aligned}$$
por
$$r = R, \quad \theta = \Theta + \alpha Z, \quad z = Z.$$
Una deformación de este tipo se llama *torsión pura* ("pure torsion"). Describe la situación en la que un cilindro con generadores paralelos al eje Z se retuerce de tal forma que las secciones horizontales del mismo permanecen paralelas y planas. La constante α representa el *ángulo de torsión* ("angle of twist") por unidad de longitud.
Probar que el correspondiente desplazamiento viene dado por
$$\begin{aligned}
u_1(\mathbf{p}) &= p_1(\cos\beta - 1) - p_1\operatorname{sen}\beta,\\
u_2(\mathbf{p}) &= p_2(\cos\beta - 1) + p_1\operatorname{sen}\beta,\\
u_3(\mathbf{p}) &= 0,
\end{aligned}$$
donde $\beta = \alpha p_3$.
Probar también que tanto $\nabla\mathbf{u}$ como $\mathbf{u}$ se aproximan a cero cuando $\alpha \to 0$ y que, de hecho,
$$\begin{aligned}
u_1(\mathbf{p}) &= -\alpha p_2 p_3 + o(\alpha),\\
u_2(\mathbf{p}) &= \alpha p_1 p_3 + o(\alpha).
\end{aligned}$$

Solución. Las coordenadas cartesianas de $\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}$ son

$$\begin{aligned} &u_1(\mathbf{p}) = f_1(\mathbf{p}) - p_1 = x_1 - p_1 = R\cos(\Theta + \alpha p_3) - p_1 = \\ &R\cos(\Theta + \beta) - p_1 = R(\cos\Theta\cos\beta - \operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\beta) - p_1 = \\ &p_1\cos\beta - p_2\operatorname{sen}\beta - p_1 = p_1(\cos\beta - 1) - p_2\operatorname{sen}\beta, \end{aligned} \tag{128}$$

$$\begin{aligned} &u_2(\mathbf{p}) = f_2(\mathbf{p}) - p_2 = R\operatorname{sen}(\Theta + \beta) - p_2 = \\ &R(\operatorname{sen}\Theta\cos\beta + \cos\Theta\operatorname{sen}\beta) - p_2 = \\ &p_2\cos\beta + p_1\operatorname{sen}\beta - p_2 = p_2(\cos\beta - 1) + p_1\operatorname{sen}\beta, \end{aligned} \tag{129}$$

$$u_3(\mathbf{p}) = f_3(\mathbf{p}) - p_3 = p_3 - p_3 = 0, \tag{130}$$

lo que resuelve la primera parte del ejercicio.

Ahora es evidente que $\lim_{\alpha\to 0}\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Por otra parte, $\nabla\mathbf{u}(\mathbf{p})$ es

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha p_3) - 1 & -\operatorname{sen}(\alpha p_3) & -\alpha p_1\operatorname{sen}(\alpha p_3) - \alpha p_2\cos(\alpha p_3) \\ \operatorname{sen}(\alpha p_3) & \cos(\alpha p_3) - 1 & -\alpha p_2\operatorname{sen}(\alpha p_3) + \alpha p_1\cos(\alpha p_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{131}$$

donde se ve que también $\lim_{\alpha\to 0}\nabla\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Para finalizar notemos que

$$\cos(\alpha p_3) = \cos 0 - (\operatorname{sen} 0)\ \alpha p_3 + o(\alpha) = 1 + o(\alpha), \tag{132}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha p_3) = \operatorname{sen} 0 + (\cos 0)\ \alpha p_3 + o(\alpha) = \alpha p_3 + o(\alpha), \tag{133}$$

con lo cual, yendo a las anteriores expresiones para u_1 y u_2, se obtienen

$$u_1(\mathbf{p}) = -\alpha p_2 p_3 + o(\alpha), \tag{134}$$
$$u_2(\mathbf{p}) = \alpha p_1 p_3 + o(\alpha). \tag{135}$$

■

8. MOVIMIENTOS

1. Un movimiento es un *corte simple* ("simple shear") si el campo de velocidades tiene la forma $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_1(x_2)\mathbf{e}_1$ en algún sistema cartesiano de coordenadas. Probar que, para un corte simple, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, $(\operatorname{grad}\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}'$.

Solución. Claramente, $\operatorname{div}\mathbf{v} = v_{i,i} = 0$. El gradiente de la velocidad es

$$\operatorname{grad}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & v_{1,2}(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{136}$$

y por lo tanto $(\operatorname{grad}\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Por último, $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + (\operatorname{grad}\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. ■

En los dos ejercicios siguientes $\mathbf{D}$ *y* $\mathbf{W}$ *son, respectivamente, la parte simétrica y antisimétrica de* $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$.

2. Probar que $\dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{F}^T\mathbf{D}_m\mathbf{F}$.

Solución. $\mathbf{C}(\mathbf{p},t) = (\mathbf{F}(\mathbf{p},t))^T\mathbf{F}(\mathbf{p},t)$ es el tensor de deformación de Cauchy–Green a la derecha. Entonces, teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m\mathbf{F}$, $\dot{\mathbf{C}} = (\dot{\mathbf{F}})^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T\mathbf{L}_m^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\mathbf{L}_m\mathbf{F} = \mathbf{F}^T(\mathbf{L}_m^T + \mathbf{L}_m)\mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T\mathbf{D}_m\mathbf{F}$. ■

3. Sea $\mathbf{v}$ un campo de velocidades de clase C^2. Probar que

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{v}} = (\operatorname{div}\mathbf{v})^{\boldsymbol{\cdot}} + |\mathbf{D}|^2 - |\mathbf{W}|^2.$$

Solución. Un simple cálculo muestra que $|\mathbf{D}|^2 = (|\mathbf{L}|^2 + \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T)/2$ y que $|\mathbf{W}|^2 = (|\mathbf{L}|^2 - \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T)/2$, y por lo tanto

$$|\mathbf{D}|^2 - |\mathbf{W}|^2 = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T. \tag{137}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\operatorname{div}(\mathbf{L}\mathbf{v}) = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v})$ porque $\mathbf{v}$ es de clase C^2 (ver ejercicio 4.9), se tiene

$$(\operatorname{div}\mathbf{v})^{\boldsymbol{\cdot}} = (\operatorname{div}\mathbf{v})' + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{v})' + \operatorname{div}(\mathbf{L}\mathbf{v}) - \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T. \tag{138}$$

El ejercicio queda resuelto usando la igualdad (137) y el hecho de que $(\operatorname{div}\mathbf{v})' + \operatorname{div}(\mathbf{L}\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}' + \mathbf{L}\mathbf{v}) = \operatorname{div}\dot{\mathbf{v}}$. ■

4. Considérese el movimiento de $\mathcal{E}$ definido por

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1\mathrm{e}^t,\\ x_2 &= p_2 + t,\\ x_3 &= p_3, \end{aligned}$$

en cierto sistema cartesiano. Calcular la descripción espacial de la velocidad $\mathbf{v}$ y determinar las líneas de corriente.

Solución. El movimiento es $\mathsf{x}(\mathbf{p},t) = (p_1\mathrm{e}^t, p_2 + t, p_3)$, y, por lo tanto, la aplicación de referencia es $\mathsf{p}(\mathbf{x},t) = (x_1\mathrm{e}^{-t}, x_2 - t, x_3)$. La velocidad es $\dot{\mathsf{x}}(\mathbf{p},t) = (p_1\mathrm{e}^t, 1, 0)$; la descripción espacial de la velocidad es entonces

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{x},t),t) = (x_1, 1, 0). \tag{139}$$

Las líneas de corriente en un instante τ fijo son las soluciones maximales de la ecuación $\dot{\mathbf{s}}(\lambda) = \mathbf{v}(\mathbf{s}(\lambda),\tau)$ o, lo que es lo mismo, del sistema

$$\begin{cases} \dot{s}_1(\lambda) = s_1(\lambda),\\ \dot{s}_2(\lambda) = 1,\\ \dot{s}_3(\lambda) = 0. \end{cases} \tag{140}$$

■

5. Consideremos el movimiento x definido por $\mathsf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{U}(t)[\mathbf{p} - \mathbf{p}_0]$, donde $\mathbf{U}(t) = \alpha_i(t)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, con los $\alpha_i > 0$ y regulares y $\{\mathbf{e}_i\}$ una base ortonormal. Calcular p, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{L}$, y determinar las líneas de corriente.

Solución. Como $(x_1, x_2, x_3) = \mathsf{x}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{p}_0 + \alpha_i(t)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0 + \alpha_i(t)(p_i - p_{0i})\mathbf{e}_i$, el movimiento está determinado por las ecuaciones

$$x_1 = p_{01} + \alpha_1(t)(p_1 - p_{01}) = \alpha_1(t)p_1 - (\alpha_1(t) - 1)p_{01}, \quad (141)$$
$$x_2 = p_{02} + \alpha_2(t)(p_2 - p_{02}) = \alpha_2(t)p_2 - (\alpha_2(t) - 1)p_{02}, \quad (142)$$
$$x_3 = p_{03} + \alpha_3(t)(p_3 - p_{03}) = \alpha_3(t)p_3 - (\alpha_3(t) - 1)p_{03}. \quad (143)$$

Entonces la aplicación de referencia $(p_1, p_2, p_3) = \mathsf{p}(\mathbf{x}, t)$ viene dada por

$$p_1 = \frac{x_1 + (\alpha_1(t) - 1)p_{01}}{\alpha_1(t)}, \quad (144)$$
$$p_2 = \frac{x_2 + (\alpha_2(t) - 1)p_{02}}{\alpha_2(t)}, \quad (145)$$
$$p_3 = \frac{x_3 + (\alpha_3(t) - 1)p_{03}}{\alpha_3(t)}. \quad (146)$$

La velocidad es

$$\dot{\mathsf{x}}(\mathbf{p}, t) = (\dot\alpha_1(t)(p_1 - p_{01}), \dot\alpha_2(t)(p_2 - p_{02}), \dot\alpha_3(t)(p_3 - p_{03})). \quad (147)$$

La descripción espacial de la velocidad queda

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{x}, t), t) = \left(\frac{\dot\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)}(x_1 - p_{01}), \frac{\dot\alpha_2(t)}{\alpha_2(t)}(x_2 - p_{02}), \frac{\dot\alpha_3(t)}{\alpha_3(t)}(x_3 - p_{03})\right). \quad (148)$$

Ahora es claro que

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{diag}\left(\frac{\dot\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)}, \frac{\dot\alpha_2(t)}{\alpha_2(t)}, \frac{\dot\alpha_3(t)}{\alpha_3(t)}\right) = \frac{\dot\alpha_i(t)}{\alpha_i(t)}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i. \quad (149)$$

Por último, las líneas de corriente en un instante τ fijo son las soluciones maximales de $\dot{\mathbf{s}}(\lambda) = \mathbf{v}(\mathbf{s}(\lambda), \tau)$; o sea, del sistema

$$\begin{cases} \dot s_1(\lambda) = \dfrac{\dot\alpha_1(\tau)}{\alpha_1(\tau)}(\dot s_1(\lambda) - p_{01}), \\[2ex] \dot s_2(\lambda) = \dfrac{\dot\alpha_2(\tau)}{\alpha_2(\tau)}(\dot s_2(\lambda) - p_{02}), \\[2ex] \dot s_3(\lambda) = \dfrac{\dot\alpha_3(\tau)}{\alpha_3(\tau)}(\dot s_3(\lambda) - p_{03}). \end{cases} \quad (150)$$

■

6. Definir la derivada espacial con respecto al tiempo y el gradiente espacial para un campo material, y probar que $\mathsf{x}' = \mathbf{0}$ y que $\operatorname{grad}\mathsf{x} = \mathbf{I}$.

Solución. Si Φ es un campo material regular (con dominio $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$), definimos

- Derivada espacial con respecto al tiempo de Φ:

$$\Phi' = ((\Phi_s)')_m. \tag{151}$$

- Gradiente espacial de Φ:

$$\operatorname{grad}\Phi = (\operatorname{grad}(\Phi_s))_m. \tag{152}$$

Para el campo material del movimiento

$$\mathsf{x} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}, \tag{153}$$

tenemos que $\mathsf{x}_s(\mathbf{x}, t) = \mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}$, y por lo tanto $\mathsf{x}' = \mathbf{0}$ y $\operatorname{grad}\mathsf{x} = \mathbf{I}$, como queríamos ver. ■

7. Considérese en $\mathcal{B}$ la superficie definida por

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{D} : \ \varphi(\mathbf{p}) = 0\},$$

donde $\mathcal{D}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{B}$ y φ es un campo escalar sobre $\mathcal{D}$ regular tal que $\nabla\varphi$ no se anula en $\mathcal{S}$.
Sea $\mathsf{x} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ un movimiento de $\mathcal{B}$. Entonces, en el instante t, la superficie $\mathcal{S}$ ocupa la superficie

$$\mathcal{S}_t = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_t : \ \psi(\mathbf{x}, t) = 0\},$$

donde $\mathcal{D}_t = \mathsf{x}(\mathcal{D}, t)$ y $\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathsf{p}(\mathbf{x}, t))$.
Probar:

a) $\nabla\varphi(\mathbf{p})$ es normal a $\mathcal{S}$ en $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$;

b) $\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}, t)$ es normal a $\mathcal{S}_t$ en $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_t$;

c) $\nabla\varphi = \mathbf{F}^T(\operatorname{grad}\psi)_m$, y por lo tanto $\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x}, t)$ no se anula en $\mathcal{S}_t$;

d) $|\nabla\varphi|^2 = (\operatorname{grad}\psi)_m \cdot \mathbf{B}(\operatorname{grad}\psi)_m$, donde $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ es el tensor de deformación de Cauchy–Green a la izquierda;

e) $\psi' = -\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\psi$.

Solución.

a) Sea $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ y sea $\mathbf{c} : [0, 1] \to \mathcal{S}$ una curva regular sobre $\mathcal{S}$ tal que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$. Como $\varphi(\mathbf{c}(\sigma)) = 0$, resulta al derivar que $\nabla\varphi(\mathbf{c}(\sigma)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(\sigma) = 0$, y en particular, tomando $\sigma = 0$, se obtiene $\nabla\varphi(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{c}}(0) = 0$.

Hemos visto que $\nabla\varphi(\mathbf{p})$ es perpendicular en $\mathbf{p}$ a cualquier curva regular sobre $\mathcal{S}$ que pase por $\mathbf{p}$, lo que equivale a decir que $\nabla\varphi(\mathbf{p})$ es normal a $\mathcal{S}$ en $\mathbf{p}$.

b) Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_t$ y sea $\mathbf{c} : [0, 1] \to \mathcal{S}_t$ una curva regular sobre $\mathcal{S}_t$ tal que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$. Ahora se razona como en el apartado (a), teniendo en cuenta que $\psi(\mathbf{c}(\sigma), t) = 0$ para todo σ.

c) Téngase presente que $\mathbf{F}(\mathbf{p},t) = \nabla \mathsf{x}(\mathbf{p},t)$, y por lo tanto, si $\mathsf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $(\mathbf{F}(\mathbf{p},t))_{ij} = x_{i,j}(\mathbf{p},t)$.
Como $\varphi(\mathsf{p}(\mathbf{x},t)) = \psi(\mathbf{x},t)$, se tiene que

$$\varphi(\mathbf{p}) = \psi(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t) = \psi(x_1(\mathbf{p},t), x_2(\mathbf{p},t), x_3(\mathbf{p},t),t). \tag{154}$$

Derivando la expresión (154) se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi_{,i}(\mathbf{p}) = \psi_{,1}(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t)x_{1,i}(\mathbf{p},t) + \psi_{,2}(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t)x_{2,i}(\mathbf{p},t) + \\ \psi_{,3}(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t)x_{3,i}(\mathbf{p},t) = x_{j,i}(\mathbf{p},t)\psi_{,j}(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t) = \\ \left((\mathbf{F}(\mathbf{p},t))^T\right)_{ij}\psi_{,j}(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t),\end{aligned} \tag{155}$$

o, equivalentemente,

$$\nabla\varphi(\mathbf{p}) = (\mathbf{F}(\mathbf{p},t))^T \operatorname{grad}\psi(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t) = (\mathbf{F}(\mathbf{p},t))^T (\operatorname{grad}\psi)_m(\mathbf{p},t). \tag{156}$$

d) Usando el apartado (c) y propiedades del producto escalar de tensores (ver ejercicio 1.7),

$$\begin{aligned}|\nabla\varphi|^2 = \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi = \mathbf{F}^T(\operatorname{grad}\psi)_m\cdot\mathbf{F}^T(\operatorname{grad}\psi)_m = \\ (\operatorname{grad}\psi)_m\cdot\mathbf{F}\mathbf{F}^T(\operatorname{grad}\psi)_m = (\operatorname{grad}\psi)_m\cdot\mathbf{B}(\operatorname{grad}\psi)_m.\end{aligned} \tag{157}$$

e) Derivando con respecto a t la expresión $\psi(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t) = \varphi(\mathbf{p})$ (cierta para todo $t \in \mathbb{R}$), resulta $\operatorname{grad}\psi(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t)\cdot\dot{\mathsf{x}}(\mathbf{p},t) + \psi'(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t) = 0$, y evaluando en $\mathbf{p} = \mathsf{p}(\mathbf{x},t)$, $\operatorname{grad}\psi(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},t) + \psi'(\mathbf{x},t) = 0$; es decir, $\psi' = -\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\psi$, como queríamos demostrar. ■

9. TIPOS DE MOVIMIENTOS. GIRO. RAZÓN DE ESTIRAMIENTO

1. Es a menudo conveniente etiquetar puntos materiales por sus posiciones en un instante dado τ.

   Supongamos que un punto material $\mathbf{p}$ ocupa el lugar $\mathbf{y}$ en el instante τ y un lugar $\mathbf{x}$ en un tiempo arbitrario t:

$$\mathbf{y} = \mathsf{x}(\mathbf{p},\tau), \quad \mathbf{x} = \mathsf{x}(\mathbf{p},t).$$

   Grosso modo, queremos expresar $\mathbf{x}$ en función de $\mathbf{y}$. Así pues, como

$$\mathbf{p} = \mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),$$

   tenemos

$$\mathbf{x} = \mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t).$$

   Llamamos a la función

$$\mathsf{x}_\tau : \mathcal{B}_\tau \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}$$

   definida por

$$\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t) = \mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t) \tag{158}$$

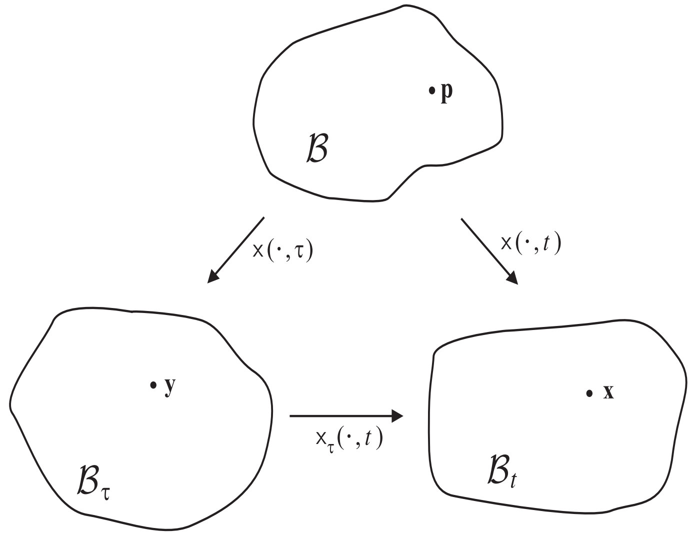


Figura III.2: Movimento relativo al tiempo τ.

el *movimiento relativo al tiempo* τ; $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t)$ es el lugar ocupado en el instante t por el punto material que ocupa $\mathbf{y}$ en el instante τ. Sea

$$\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}} \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t),$$

donde $\nabla_{\mathbf{y}}$ es el gradiente con respecto a $\mathbf{y}$ dejando t fijo. Análogamente, sea

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{R}_\tau \mathbf{U}_\tau$$

la descomposición polar de $\mathbf{F}_\tau$ a la derecha, y definamos

$$\mathbf{C}_\tau = (\mathbf{U}_\tau)^2.$$

a) Probar que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) \tag{159}$$

si $\mathbf{x} = \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t)$.

b) Úsese la relación $\mathsf{x}(\cdot, t) = \mathsf{x}_\tau(\cdot, t) \circ \mathsf{x}(\cdot, \tau)$ para demostrar que

$$\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t)\mathbf{F}(\mathbf{p}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{p}, t), \tag{160}$$

donde $\mathbf{y} = \mathsf{x}(\mathbf{p}, \tau)$, y después, apelando a la unicidad de la descomposición polar, probar que

$$\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{I}$$

para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$.

c) Probar que, si $\mathbf{y} = \mathsf{x}(\mathbf{p}, \tau)$, entonces

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \tau)^T \mathbf{C}_\tau(\mathbf{y}, t)\mathbf{F}(\mathbf{p}, \tau).$$

d) Demostrar que, para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$,

$$\mathbf{L}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)|_{t=\tau} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y},t)\right]_{t=\tau},$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y},t)|_{t=\tau}, \quad \mathbf{W}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y},t)|_{t=\tau}. \quad (161)$$

e) Demostrar que, para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$,

$$\frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)|_{t=\tau} = \operatorname{grad}\mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{y},\tau),$$

donde $\mathbf{a}^{(n)}$ es la descripción espacial de la derivada material de x de orden $n+2$ con respecto al tiempo.

Solución. Nótese que (158) implica que x_τ es de clase C^3, porque p y x son de clase C^3. Recordemos que $\mathcal{B}_\tau = \mathsf{x}(\mathcal{B},\tau)$, que $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$ y que $\mathbf{D}$ y $\mathbf{W}$ son, respectivamente, la parte simétrica y la parte antisimétrica de $\mathbf{L}$. $\mathbf{D}$ es el *estiramiento* ("stretching") y $\mathbf{W}$ es el *giro* ("spin").

a) Recordemos que $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{x},t),t)$, y por lo tanto $\mathbf{v}(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t) = \dot{\mathsf{x}}(\mathbf{p},t)$. Si derivamos con respecto al tiempo la igualdad $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t) = \mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t) = \dot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t) = \mathbf{v}(\mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t),t) = \mathbf{v}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t), \quad (162)$$

como queríamos demostrar.

b) De la igualdad $\mathsf{x}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t) = \mathsf{x}(\mathbf{p},t)$ se obtiene, al derivar con respecto a $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{F}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{p},t). \quad (163)$$

De ésta resulta $\mathbf{F}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),\tau) = \mathbf{I}$ o, lo que es lo mismo, $\mathbf{F}(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{I}$ para $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$. Por la unicidad de la descomposición polar, $\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{R}_\tau(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{I}$.

c) Usando el apartado (b),

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{p},t) = (\mathbf{F}(\mathbf{p},t))^T\mathbf{F}(\mathbf{p},t) = \\ (\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau))^T(\mathbf{F}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t))^T\mathbf{F}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau) = \\ (\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau))^T\mathbf{C}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau). \end{aligned} \quad (164)$$

d) Por el apartado (a) sabemos que

$$\mathbf{v}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t). \quad (165)$$

Al derivar con respecto a $\mathbf{y}$ obtenemos

$$\mathbf{L}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t). \quad (166)$$

Evaluando (166) en $t = \tau$, y teniendo en cuenta que $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{y}$ y que $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{I}$ en virtud del apartado (b), llegamos al resultado

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau}. \tag{167}$$

Por otro lado, derivando con respecto a t la igualdad $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t)\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t)$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t) + (\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t))\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t), \tag{168}$$

de donde, evaluando en $t = \tau$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{I}$ por el apartado (b),

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau}. \tag{169}$$

Ahora notemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t) \text{ es simétrico (para todo } t\text{; en particular para } t = \tau), \tag{170}$$

porque $\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t)$ es simétrico, y que, por ser $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t)$ ortogonal,

$$(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t))(\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t))^T \text{ es antisimétrico,} \tag{171}$$

en virtud del ejercicio 3.6. Luego, como $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{I}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{R}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} \text{ es antisimétrico,} \tag{172}$$

lo que demuestra (161), porque la descomposición de un tensor en parte simétrica más parte antisimétrica es única.

e) En este apartado se supone que x tiene la regularidad necesaria para que las derivadas que aparecen tengan sentido. La definición de $\mathbf{a}^{(n)}$ es

$$\mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\mathsf{x}(\mathbf{p}, t)|_{\mathbf{p}=\mathsf{p}(\mathbf{x}, t)}, \tag{173}$$

de donde

$$\mathbf{a}^{(n)}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}.t), t) = \frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\mathsf{x}(\mathbf{p}, t)|_{\mathbf{p}=\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau)} = \frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t). \tag{174}$$

Derivando (174) con respecto a $\mathbf{y}$,

$$\operatorname{grad} \mathbf{a}^{(n)}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), t)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t), \tag{175}$$

y evaluando en $t = \tau$,

$$\operatorname{grad} \mathbf{a}^{(n)}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau}, \tag{176}$$

ya que $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{y}$ y $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{I}$. ∎

Con las notaciones del ejercicio 1, si

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}, t) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$$

es la trayectoria del movimiento, se cumple la igualdad

$$\mathcal{T} = \{(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), t) : \ \mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau, t \in \mathbb{R}\}.$$

Esta igualdad se usará en el ejercicio siguiente.

2. Sea x un movimiento, y supongamos que para cierto τ fijo se tiene

$$\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z}),$$

con $\mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{z}$ puntos de $\mathcal{B}_\tau$ y $\mathbf{Q}(t) \in \mathrm{Orth}^+$. Probar que entonces x es un movimiento rígido.

Solución. Nótese que $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{z}, t) = \mathbf{q}(t)$, de modo que $\mathbf{q}$ es de clase C^3. Además, si podemos elegir $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ tal que $\mathbf{y} - \mathbf{z} = (\alpha, 0, 0)$, con α no nulo, se tiene $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}(t) + \alpha(Q_{11}(t), Q_{21}(t), Q_{31}(t))$, de donde se deduce que Q_{11}, Q_{21} y Q_{31} son de clase C^3; de forma análoga se ve que las demás componentes de $\mathbf{Q}$ son de clase C^3. Si $\mathbf{z} \in \mathring{\mathcal{B}}_\tau$, es claro que se puede elegir $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ tal que $\mathbf{y} - \mathbf{z} = (\alpha, 0, 0)$ con $\alpha \neq 0$; si $\mathbf{z} \notin \mathring{\mathcal{B}}_\tau$, se elige $\mathbf{z}_0 \in \mathring{\mathcal{B}}_\tau$ y se pone $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z}_0)$, con $\mathbf{q}_0(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{z}_0 - \mathbf{z})$; luego, sucesivamente, se ve primero que $\mathbf{q}_0$ es de clase C^3 y después que $\mathbf{Q}$ es de clase C^3.

En virtud del teorema de caracterización de los movimientos rígidos, basta demostrar que $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ es antisimétrico para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}, t) : \ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}$ es la trayectoria de x. Recordemos que $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Según el apartado (a) del ejercicio 1,

$$\mathbf{v}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), \tag{177}$$

y derivando con respecto a $\mathbf{y}$,

$$\mathbf{L}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), t)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) \tag{178}$$

para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso, $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{Q}(t)$ y $(\partial/\partial t)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)$, y por lo tanto $\mathbf{L}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T$ para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, o, equivalentemente,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T \quad \forall \ (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}, \tag{179}$$

lo que implica que x es un movimiento rígido, ya que, por el ejercicio 3.6, $\dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T$ es antisimétrico. ■

3. Sea x un movimiento rígido. Probar que x_τ es de la forma $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, con $\mathbf{z}$ y $\mathbf{q}(t)$ puntos y $\mathbf{Q}(t) \in \mathrm{Orth}^+$.

SOLUCIÓN. x es rígido si, fijados $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{B}$, la cantidad

$$\delta(t) = |\mathsf{x}(\mathbf{p}, t) - \mathsf{x}(\mathbf{q}, t)| \tag{180}$$

es constante en el tiempo. Sean $\mathbf{y}, \mathbf{y}^* \in \mathcal{B}_\tau$, y tomemos $\mathbf{p} = \mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau)$, $\mathbf{q} = \mathsf{p}(\mathbf{y}^*, \tau)$. Así,

$$\delta(\tau) = |\mathsf{x}(\mathbf{p}, \tau) - \mathsf{x}(\mathbf{q}, \tau)| = |\mathbf{y} - \mathbf{y}^*| \tag{181}$$

y

$$\delta(t) = |\mathsf{x}(\mathbf{p}, t) - \mathsf{x}(\mathbf{q}, t)| = |\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) - \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}^*, t)|. \tag{182}$$

Como $\delta(\tau) = \delta(t)$ porque x es rígido, resulta

$$|\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) - \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}^\star, t)| = |\mathbf{y} - \mathbf{y}^*| \quad \forall\ \mathbf{y}, \mathbf{y}^* \in \mathcal{B}_\tau,\ \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{183}$$

La ecuación (183) implica que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathsf{x}_\tau(\cdot, t)$ es una deformación rígida. En virtud del teorema de caracterización de las deformaciones rígidas, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}^*, t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) \quad \forall\ \mathbf{y}, \mathbf{y}^* \in \mathcal{B}_\tau, \tag{184}$$

con $\mathbf{Q}(t) \in \mathrm{Orth}^+$. Tomando $\mathbf{z} = \mathbf{y}^*$ y $\mathbf{q}(t) = \mathsf{x}_\tau(\mathbf{z}, t)$, tenemos $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, como queríamos ver. Ahora podemos razonar como en el ejercicio 2 para ver que $\mathbf{q}$ y $\mathbf{Q}$ son de clase C^3. ■

Los ejercicios 2 y 3 demuestran la siguiente proposición.

Proposición *Dados un movimiento x y un tiempo τ, equivalen:*

a) *x es un movimiento rígido.*

b) *$\mathsf{x}_\tau(\cdot, t)$ es una deformación rígida para cada $t \in \mathbb{R}$.*

4. Sea x un movimento de clase C^∞. Los tensores

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathbf{C}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

se llaman *tensores de Rivlin–Ericksen*. Se pide:

a) Probar que $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$.

b) Probar que $\mathbf{C}_s^{(n)} = \mathbf{F}_s^T \mathbf{A}_n \mathbf{F}_s$, donde $\mathbf{C}^{(n)}$ es la derivada material de $\mathbf{C}$ de orden n con respecto al tiempo.

c) Demostrar que $\mathbf{A}_{n+1} = \dot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{A}_n \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_n$.

SOLUCIÓN.

a) Por el ejercicio 1 sabemos que

$$\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{y}, \tau). \tag{185}$$

Entonces, de la igualdad $\mathbf{C}_\tau(\mathbf{y}, t) = (\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t))^2$ se deduce

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} = 2\mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, \tau) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_\tau(\mathbf{y}, t)|_{t=\tau} = 2\mathbf{D}(\mathbf{y}, \tau). \tag{186}$$

b) Como $\mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{p},t) = (\partial^n/\partial t^n)\mathbf{C}(\mathbf{p},t)$, se tiene

$$\mathbf{C}_s^{(n)}(\mathbf{y},\tau) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathbf{C}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)|_{t=\tau}. \tag{187}$$

Derivando n veces con respecto a t la expresión

$$\mathbf{C}(\mathbf{p},t) = (\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau))^T\mathbf{C}_\tau(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{p},\tau),t)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau), \tag{188}$$

obtenida en el apartado (c) del ejercicio 1, tenemos

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathbf{C}(\mathbf{p},t) = (\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau))^T\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathbf{C}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t)\right)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau), \tag{189}$$

y evaluando ésta en $(\mathbf{p},t) = (\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),\tau)$ se obtiene

$$\mathbf{C}_s^{(n)}(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{F}_s^T(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathbf{C}_\tau(\mathbf{y},t)|_{t=\tau}\mathbf{F}_s(\mathbf{y},\tau) \tag{190}$$

para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ y para todo $\tau \in \mathbb{R}$; es decir,

$$\mathbf{C}_s^{(n)}(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{F}_s^T(\mathbf{y},\tau)\mathbf{A}_n(\mathbf{y},\tau)\mathbf{F}_s(\mathbf{y},\tau) \tag{191}$$

para todo $(\mathbf{y},\tau) \in \mathcal{T}$, como queríamos demostrar.

c) Como $\mathbf{C}^{(n+1)} = (\mathbf{C}^{(n)})^{\boldsymbol{\cdot}}$, se tiene en virtud del apartado (b) que $\mathbf{F}_s^T\mathbf{A}_{n+1}\mathbf{F}_s = (\mathbf{F}_s^T\mathbf{A}_n\mathbf{F}_s)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\mathbf{F}_s^T)^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{A}_n\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_s^T\dot{\mathbf{A}}_n\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_s^T\mathbf{A}_n\dot{\mathbf{F}}_s$. Teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m\mathbf{F}$, resulta

$$\mathbf{F}_s^T\mathbf{A}_{n+1}\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s^T(\mathbf{L}^T\mathbf{A}_n + \dot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{A}_n\mathbf{L})\mathbf{F}_s, \tag{192}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{L}^T\mathbf{A}_n + \dot{\mathbf{A}}_n + \mathbf{A}_n\mathbf{L}, \tag{193}$$

ya que $\mathbf{F}_s$ es no singular. ■

5. Probar que el campo de aceleraciones de un movimiento rígido tiene la forma

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{y},t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \boldsymbol{\omega}(t)\times[\boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})],$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular.

Solución. Recordemos que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es el vector axial del giro $\mathbf{W}$, que a su vez es la parte antisimétrica de $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$. Para un movimiento rígido se sabe que $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, con $\mathbf{W}(t)$ antisimétrico, y por lo tanto $\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{W}(t)$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ y

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{194}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}'(\mathbf{x},t) + \mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}'(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{v}(\mathbf{x},t) =&\\ \mathbf{v}'(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times[\mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})] =&\\ \mathbf{v}'(\mathbf{y},t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \boldsymbol{\omega}(t)\times[\mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})] =&\\ (\mathbf{v}'(\mathbf{y},t) + \mathbf{L}(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{y},t)) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y}) +&\\ \boldsymbol{\omega}(t)\times[\boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})] =&\\ \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{y},t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \boldsymbol{\omega}(t)\times[\boldsymbol{\omega}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{y})].&\end{aligned} \tag{195}$$

■

10. TEOREMAS DE TRANSPORTE. VOLUMEN. MOVIMIENTOS ISOCÓRICOS

1. *Cambiamos enunciado.* Sea β un campo escalar espacial regular con $\dot{\beta} = 0$, y sea $\varphi = \beta/(\det \mathbf{F})_s$. Probar que $\varphi' + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = 0$.

   Solución. Recordemos que $(\beta_m)^{\bullet} = (\dot{\beta})_m$, y por lo tanto podemos escribir $\dot{\beta}_m$ sin ambigüedad. Sea $\mathcal{P}$ una parte de $\mathcal{B}$. Entonces, usando el teorema del transporte de Reynolds,

$$\int_{\mathcal{P}_t} (\varphi' + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}))\, dV = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \varphi\, dV = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \frac{\beta}{(\det \mathbf{F})_s}\, dV = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \beta_m\, dV = \int_{\mathcal{P}} \dot{\beta}_m\, dV = 0. \quad (196)$$

   Como $\mathcal{P}$ puede ser cualquier parte de $\mathcal{B}$, se tiene por el teorema de localización que $\varphi' + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = 0$. ∎

   Solución alternativa. Notemos que $\varphi' + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}$, ya que $\dot{\varphi} = \varphi' + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi$. Probaremos que

$$\dot{\varphi} = -\varphi \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (197)$$

   Sabemos que $(\det \mathbf{F})^{\bullet} = (\det \mathbf{F})(\operatorname{div} \mathbf{v})_m$, con lo que, derivando la igualdad $\varphi = \beta (\det \mathbf{F})_s^{-1}$, obtenemos

$$\dot{\varphi} = -\beta (\det \mathbf{F})_s^{-2} (\det \mathbf{F})_s \operatorname{div} \mathbf{v} = -\beta (\det \mathbf{F})_s^{-1} \operatorname{div} \mathbf{v} = -\varphi \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (198)$$

   como queríamos ver. ∎

2. Probar que, si $\mathcal{B}$ es acotado,

$$\int_{\mathcal{B}_t} (2\mathbf{W}\mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v})\, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_t} [\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \mathbf{n}]\, dA, \quad (199)$$

   donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior unitaria en $\partial \mathcal{B}_t$. En consecuencia, para un movimiento isocórico con $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $\partial \mathcal{B}_t$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{W}\mathbf{v}\, dV = \mathbf{0}.$$

   Solución. Recordemos que la notación $\mathbf{v}^2$ significa $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$. Sabemos que $2\mathbf{W}\mathbf{v} = (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v} - \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2)$ y entonces, como $\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})\mathbf{v}$, tenemos

$$2\mathbf{W}\mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2). \quad (200)$$

   Ahora (199) se obtiene integrando (200) sobre $\mathcal{B}_t$, ya que, en virtud del teorema de la divergencia,

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\mathbf{n}\, dA = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dA \quad (201)$$

y

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{grad}(\mathbf{v}^2)\, dV = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{v}^2\mathbf{n}\, dA. \tag{202}$$

Si el movimiento es isocórico (i. e., $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathcal{B}_t$, la fórmula (199) se reduce a

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{W}\mathbf{v}\, dV = \mathbf{0}. \tag{203}$$

■

3. **(Segunda parte del teorema del transporte de Reynolds)** Sea $\mathbf{\Phi}$ un campo espacial vectorial regular. Probar que, para cualquier parte $\mathcal{P}$ y para todo tiempo t, se satisface la igualdad

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}\, dV = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}'\, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA.$$

Solución.

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}'\, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, dA = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}'\, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_t} (\mathbf{\Phi}\otimes\mathbf{v})\mathbf{n}\, dA \overset{(*)}{=}$$
$$\int_{\mathcal{P}_t} (\mathbf{\Phi}' + \operatorname{div}(\mathbf{\Phi}\otimes\mathbf{v}))\, dV = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{\Phi}\operatorname{div}\mathbf{v})\, dV \overset{(**)}{=} \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}\, dV, \tag{204}$$

donde se ha usado el teorema de la divergencia en $(*)$ y la primera parte del teorema del transporte de Reynolds en $(**)$. ■

11. GIRO. CIRCULACIÓN. VORTICIDAD

Usamos las notaciones

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{v} \quad y \quad \upsilon = (\det\mathbf{F})_s.$$

1. Probar que, en el caso de un movimiento plano,

$$(\upsilon\mathbf{W})^{\cdot} = \upsilon\mathbf{J}.$$

En consecuencia,

$$(\upsilon\mathbf{W})^{\cdot} = \mathbf{0}$$

cuando $\dot{\mathbf{v}}$ es el gradiente de un potencial.

Solución. Recordemos que

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\mathbf{v} - (\operatorname{grad}\mathbf{v})^T) \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\dot{\mathbf{v}} - (\operatorname{grad}\dot{\mathbf{v}})^T), \tag{205}$$

donde $\mathbf{W}$ es el *giro* ("spin"). Sabemos que $(\det\mathbf{F})^{\cdot} = (\det\mathbf{F})(\operatorname{div}\mathbf{v})_m$, y por lo tanto

$$\dot{\upsilon} = (\det\mathbf{F})_s \operatorname{div}\mathbf{v} = \upsilon\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{206}$$

Por otra parte, según el teorema del transporte del giro, $\dot{\mathbf{W}}+\mathbf{DW}+\mathbf{WD} = \mathbf{J}$, donde $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\mathbf{v} + (\operatorname{grad}\mathbf{v})^T)$ es el *estiramiento* ("stretching"). Entonces

$$(\upsilon\mathbf{W})^\bullet = \dot{\upsilon}\mathbf{W} + \upsilon\dot{\mathbf{W}} = \upsilon(\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{W} + \upsilon[\mathbf{J} - (\mathbf{DW} + \mathbf{WD})]. \tag{207}$$

Si el movimento es plano, $\mathbf{WD} + \mathbf{DW} = (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{W}$, y por lo tanto

$$(\upsilon\mathbf{W})^\bullet = \upsilon\mathbf{J}, \tag{208}$$

como queríamos ver.

Cuando $\dot{\mathbf{v}}$ es el gradiente de un potencial, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ya que $\operatorname{grad}\dot{\mathbf{v}}$ es simétrico, y se obtiene $(\upsilon\mathbf{W})^\bullet = \mathbf{0}$. ■

2. Probar la identidad

$$(\upsilon\mathbf{w})^\bullet = \upsilon\mathbf{Lw} + \upsilon\operatorname{rot}\dot{\mathbf{v}}, \tag{209}$$

donde $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$. Nótese que, cuando $\dot{\mathbf{v}}$ es el gradiente de un potencial, se tiene

$$(\upsilon\mathbf{w})^\bullet = \upsilon\mathbf{Lw}. \tag{210}$$

Solución. En los ejercicios complementarios a la sección 4 se demostró que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})\mathbf{u} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v} \tag{211}$$

para campos vectoriales regulares $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Entonces,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) = (\operatorname{grad}\mathbf{w})\mathbf{v} - \mathbf{Lw} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w}. \tag{212}$$

También usaremos la igualdad $\dot{\upsilon} = \upsilon\operatorname{div}\mathbf{v}$, probada en el ejercicio 1, y las identidades $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{w}'+(\operatorname{grad}\mathbf{w})\mathbf{v}$ y $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}'+\frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{v}^2)+\mathbf{w}\times\mathbf{v}$. Para probar (209) desarrollaremos por separado ambos miembros de la igualdad.

$$(\upsilon\mathbf{w})^\bullet = \dot{\upsilon}\mathbf{w} + \upsilon\dot{\mathbf{w}} = \upsilon(\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w} + \upsilon\mathbf{w}' + \upsilon(\operatorname{grad}\mathbf{w})\mathbf{v}. \tag{213}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\upsilon\mathbf{Lw} + \upsilon\operatorname{rot}\dot{\mathbf{v}} = \upsilon\mathbf{Lw} + \upsilon\operatorname{rot}(\mathbf{v}' + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) + \mathbf{w}\times\mathbf{v}) &= \\ \upsilon\mathbf{Lw} + \upsilon\operatorname{rot}(\mathbf{v}') + \upsilon\operatorname{rot}(\mathbf{w}\times\mathbf{v}) &= \\ \upsilon\operatorname{rot}(\mathbf{v}') + \upsilon(\operatorname{grad}\mathbf{w})\mathbf{v} + \upsilon(\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w} &= \\ \upsilon\mathbf{w}' + \upsilon(\operatorname{grad}\mathbf{w})\mathbf{v} + \upsilon(\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{w}&,\end{aligned} \tag{214}$$

donde se ha usado la igualdad $\operatorname{rot}(\mathbf{v}') = (\operatorname{rot}\mathbf{v})' = \mathbf{w}'$. Ahora (209) se deduce de (213) y (214).

Si $\dot{\mathbf{v}}$ es el gradiente de un potencial, entonces $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ y (209) se reduce a $(\upsilon\mathbf{w})^\bullet = \upsilon\mathbf{Lw}$. ■

3. *Cambiamos enunciado.* Supongamos que $\dot{\mathbf{v}}$ es el gradiente de un potencial. Probar que, dado $\tau \in \mathbb{R}$ y dado $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$, se tiene, como consecuencia de (210), que

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = [\det \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)]^{-1}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)\mathbf{w}(\mathbf{y},\tau) \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

donde $\mathbf{x}$ es el lugar ocupado en el instante t por el punto material que está en $\mathbf{y}$ en el instante τ.

Solución. Se usan las notaciones y algún resultado del ejercicio 9.1. Con esas notaciones, $\mathbf{x} = \mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t)$, donde $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t) = \mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)$, y $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t) = \nabla_{\mathbf{y}}\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t)$. Tenemos que demostrar que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{w}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t) = [\det \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)]^{-1}\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)\mathbf{w}(\mathbf{y},\tau). \tag{215}$$

Veremos que (215) equivale a demostrar

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t), \tag{216}$$

donde $\mathbf{f}(t) = \upsilon(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\mathbf{w}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)$ y $\mathbf{g}(t) = \upsilon(\mathbf{y},\tau)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)\mathbf{w}(\mathbf{y},\tau)$, y después demostraremos (216).

En virtud del ejercicio 9.1, sabemos que $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{p},t)$ si $\mathbf{y} = \mathsf{x}(\mathbf{p},\tau)$, de donde

$$\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t) = \mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)[\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),\tau)]^{-1}. \tag{217}$$

Tomando determinantes,

$$\det \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t) = \upsilon(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)[\upsilon(\mathbf{y},\tau)]^{-1}. \tag{218}$$

Así pues, (215) equivale a

$$\mathbf{w}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t) = [\upsilon(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)]^{-1}\upsilon(\mathbf{y},\tau)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)\mathbf{w}(\mathbf{y},\tau), \tag{219}$$

o, lo que es lo mismo, a (216). Para demostrar (216) veremos que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son soluciones del problema de Cauchy

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(\tau) = \upsilon(\mathbf{y},\tau)\mathbf{w}(\mathbf{y},\tau), \tag{220}$$

donde $\mathbf{A}(t) = \mathbf{L}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)$. (Nótese que el problema de Cauchy (220) tiene solución única si $\mathbf{A}$ es continua (ver p. ej. [9]), y en nuestro caso $\mathbf{A}$ es de clase C^1, porque x_τ es de clase C^3 y $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$ es de clase C^1.) Como $\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{y}$ y $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},\tau) = \mathbf{I}$, se tiene $\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{g}(\tau) = \upsilon(\mathbf{y},\tau)\mathbf{w}(\mathbf{y},\tau)$. Ahora veremos que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ satisfacen la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}$.

- $\mathbf{f}$ *satisface la ecuación:* Notemos que

$$\mathbf{f}(t) = \upsilon(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\mathbf{w}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t) = \\ \det \mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)\mathbf{w}(\mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t),t) = (\upsilon\mathbf{w})_m(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t). \tag{221}$$

  Luego, usando la identidad (210), se tiene

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = (\upsilon\mathbf{w})^{\boldsymbol{\cdot}}_m(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t) = (\upsilon\mathbf{w})^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t) = \\ (\upsilon\mathbf{L}\mathbf{w})(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t) = \mathbf{L}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\mathbf{f}(t). \tag{222}$$

- $\mathbf{g}$ *satisface la ecuación:* Notemos que

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t)\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), t)[\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), \tau)]^{-1}\mathbf{f}(\tau), \tag{223}$$

con lo cual, como $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m\mathbf{F}$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}(t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), t)[\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), \tau)]^{-1}\mathbf{f}(\tau) = \\ \mathbf{L}_m(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), t)\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), t)[\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), \tau)]^{-1}\mathbf{f}(\tau) = \\ \mathbf{L}_m(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), t)\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y}, t)\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{L}_m(\mathsf{p}(\mathbf{y}, \tau), t)\mathbf{g}(t) = \\ \mathbf{L}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y}, t), t)\mathbf{g}(t), \end{aligned} \tag{224}$$

como queríamos demostrar. ■

4. Sea $\mathbf{u}$ un campo vectorial espacial regular, y sea $\mathbf{c}$ una curva material. Probar que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_t} (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}^T\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Solución. $\mathbf{c} : [0, 1] \to \mathcal{B}$ es una curva en $\mathcal{B}$ (se supone que es regular), y $\mathbf{c}_t : [0, 1] \to \mathcal{B}_t$ es una curva en $\mathcal{B}_t$ definida por

$$\mathbf{c}_t(\sigma) = \mathsf{x}(\mathbf{c}(\sigma), t) \quad \text{para } \sigma \in [0, 1]. \tag{225}$$

Como

$$\int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma), t) \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbf{c}_t(\sigma)\ d\sigma, \tag{226}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \\ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma), t)] \cdot \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbf{c}_t(\sigma) + \mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbf{c}_t(\sigma)\right]\right\} d\sigma. \end{aligned} \tag{227}$$

Ahora nótese que de (225) se deduce

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{c}_t(\sigma) = \dot{\mathsf{x}}(\mathbf{c}(\sigma), t) = \mathbf{v}(\mathsf{x}(\mathbf{c}(\sigma), t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{c}_t(\sigma), t), \tag{228}$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbf{c}_t(\sigma)\right] = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{c}_t(\sigma)\right] = \frac{\partial}{\partial\sigma}[\mathbf{v}(\mathbf{c}_t(\sigma), t)] = \mathbf{L}(\mathbf{c}_t(\sigma), t)\frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbf{c}_t(\sigma) \tag{229}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma), t)] = \operatorname{grad}\mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma), t)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{c}_t(\sigma) + \mathbf{u}'(\mathbf{c}_t(\sigma), t) = \\ \operatorname{grad}\mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma), t)\mathbf{v}(\mathbf{c}_t(\sigma), t) + \mathbf{u}'(\mathbf{c}_t(\sigma), t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{c}_t(\sigma), t). \end{aligned} \tag{230}$$

Por fin, teniendo en cuenta (227), (229) y (230),

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x} = \\
&\int_0^1 \{\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{c}_t(\sigma),t) + [\mathbf{L}(\mathbf{c}_t(\sigma),t)]^T\mathbf{u}(\mathbf{c}_t(\sigma),t)\}\cdot \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbf{c}_t(\sigma)\; d\sigma = \\
&\int_{\mathbf{c}_t} (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}^T\mathbf{u})\cdot d\mathbf{x},
\end{aligned}
\tag{231}
$$

como queríamos demostrar. ■

5. Supongamos que $\mathbf{v}$ es el gradiente de un potencial φ. Probar que

$$
\dot{\mathbf{v}} = \operatorname{grad}\left(\varphi' + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right),
$$

y por consiguiente también la aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ es el gradiente de un potencial.

Solución. El potencial φ es de clase C^3 porque $\mathbf{v}$ es de clase C^2. Sabemos que $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) + (\operatorname{rot}\mathbf{v})\times\mathbf{v}$. Como $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$, entonces $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, y en consecuencia

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) = (\operatorname{grad}\varphi)' + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) = \\
\operatorname{grad}(\varphi') + \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{v}^2) = \operatorname{grad}\left(\varphi' + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{232}
$$

como se quería demostrar. ■

Capítulo IV

Masa. Momento

12. CONSERVACIÓN DE LA MASA

1. Utilizando la igualdad
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \rho\, dV = 0$$
y el teorema del transporte de Reynolds, probar:

   a) **Teorema local de conservación de la masa en forma no conservativa.** Se cumple
   $$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

   b) **Teorema de conservación de la masa para un volumen de control.** Para un volumen de control $\mathcal{R}$ en el instante t, se cumple
   $$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{x}, t)\, dV_{\mathbf{x}} = -\int_{\partial\mathcal{R}} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dA_{\mathbf{x}}.$$

Solución.

a) Según la primera parte del teorema del transporte de Reynolds, si $\mathbf{\Phi}$ es un campo espacial regular, escalar o vectorial, se cumple
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}\, dV = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{\Phi} \operatorname{div} \mathbf{v})\, dV. \tag{233}$$
Si tomamos $\mathbf{\Phi} = \rho$, obtenemos
$$\int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v})\, dV = 0 \tag{234}$$
para toda parte $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$ y para todo tiempo t.

Si $\mathbf{x} \in \mathring{\mathcal{B}}_t$, entonces
$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_\delta)}\int_{\Omega_\delta} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v})\, dV = 0, \tag{235}$$
por el teorema de localización, donde Ω_δ es la bola cerrada de centro $\mathbf{x}$ y radio δ. En caso de que $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_t$ la igualdad también se cumple, porque $\dot{\rho}(\cdot, t) + \rho(\cdot, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\cdot, t)$ es continua en $\mathcal{B}_t$.

b) La segunda parte del teorema del transporte de Reynolds afirma que, si $\mathbf{\Phi}$ es un campo espacial regular, escalar o vectorial, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}\ dV = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}'\ dV + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\ dA. \tag{236}$$

Aplicado a la densidad ρ, nos da la igualdad

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho'(\mathbf{x},t)\ dV = -\int_{\partial\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x},t)\ dA \tag{237}$$

para todo tiempo t y toda parte $\mathcal{P}\subset\mathcal{B}$, y en consecuencia

$$\int_{\mathcal{R}} \rho'(\mathbf{x},t)\ dV = -\int_{\partial\mathcal{R}} \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x},t)\ dA \tag{238}$$

para un volumen de control $\mathcal{R}$ en el instante t, ya que por ser $\mathcal{R}$ una región regular acotada contenida en $\mathcal{B}_\tau$ para $\tau\in(t-\delta,t+\delta)$ (por definición de volumen de control), en particular $\mathcal{R}$ es una región regular acotada contenida en $\mathcal{B}_t$, lo que implica que $\mathcal{P}=\mathsf{p}(\mathcal{R},t)$ es una parte de $\mathcal{B}$; ahora se aplica (237) a $\mathcal{P}=\mathsf{p}(\mathcal{R},t)$ y resulta (238).■

2. Probar que una deformación $\mathbf{f}$ es isocórica si, y solo si,

$$\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) = \rho_0(\mathbf{p}) \quad \forall\ \mathbf{p}\in\mathcal{B}.$$

Solución. La igualdad $\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))\det\mathbf{F}(\mathbf{p})=\rho_0(\mathbf{p})$ implica que $\rho_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))=\rho_0(\mathbf{p})$ equivale a $\det\mathbf{F}(\mathbf{p})=1$; es decir, a que $\mathbf{f}$ sea isocórica. ■

3. Sea $\mathbf{\Phi}$ un campo espacial regular, escalar o vectorial. Probar que, para cualquier parte $\mathcal{P}$,

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x},t)\ dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{P}_\tau} \mathbf{\Phi}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\rho(\mathbf{y},\tau)\ dV_{\mathbf{y}},$$

donde x_τ es el movimiento relativo al tiempo τ (ver ejercicio 9.1).

Solución. Recordemos que

$$\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t)=\mathsf{x}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t) \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)=\nabla_{\mathbf{y}}\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t). \tag{239}$$

Haciendo el cambio de variable $\mathbf{x}=\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t)$, se tiene

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x},t)\ dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{P}_\tau} \mathbf{\Phi}(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\rho(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\det\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)\ dV_{\mathbf{y}}, \tag{240}$$

ya que $\det\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)>0$. Atendiendo a (240), el ejercicio estará resuelto si demostramos la igualdad

$$\rho(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\det\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)=\rho(\mathbf{y},\tau). \tag{241}$$

Como $\rho(\mathsf{x}(\mathbf{p},t),t)\det\mathbf{F}(\mathbf{p},t)=\rho_0(\mathbf{p})$,

$$\rho(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)=\rho_0(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau))[\det\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)]^{-1}, \tag{242}$$

y, análogamente, como $\mathbf{F}_\tau(\mathsf{x}(\mathbf{p},\tau),t)\mathbf{F}(\mathbf{p},\tau)=\mathbf{F}(\mathbf{p},t)$ (ver ejercicio 9.1),

$$\det\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)=\det\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),t)[\det\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),\tau)]^{-1}. \tag{243}$$

Usando (242) y (243), se tiene

$$\begin{aligned}\rho(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},t),t)\det\mathbf{F}_\tau(\mathbf{y},t)=\rho_0(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau))[\det\mathbf{F}(\mathsf{p}(\mathbf{y},\tau),\tau)]^{-1}=\\ \rho(\mathsf{x}_\tau(\mathbf{y},\tau),\tau)=\rho(\mathbf{y},\tau),\end{aligned} \tag{244}$$

como queríamos demostrar. ■

4. *Cambiamos enunciado.* (**Teorema de Kelvin)** Probar el Teorema de Kelvin: De todos los movimientos de un cuerpo que, en un instante t,

   a) se corresponden con una densidad estacionaria dada ρ,
   b) tienen asignado un mismo $\mathcal{B}_t$, y
   c) tienen un mismo valor de $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ en $\partial\mathcal{B}_t$,

   uno cuya velocidad es el gradiente de un potencial tiene la menor energía cinética en el instante t.

   Más precisamente, sea $\mathcal{R}$ una región regular acotada del espacio, sea $\rho>0$ un campo escalar regular en $\mathcal{R}$, y sea λ un campo escalar en $\partial\mathcal{R}$.

   Para $\mathbf{v}$ campo vectorial regular en $\mathcal{R}$ se define

$$K\{\mathbf{v}\}=\int_{\mathcal{R}}\frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho\,dV,$$

   la energía cinética asociada al campo $\mathbf{v}$.
   Si $\mathcal{A}=\{\mathbf{v}:\ \mathbf{v}$ campo vectorial regular en $\mathcal{R}$ solución de (P)$\}$, siendo (P) el problema

$$\text{(P)}\left\{\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0 &\quad \text{en } \mathcal{R},\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\lambda &\quad \text{en } \partial\mathcal{R},\end{aligned}\right.$$

   pruébese que, cuando $\mathbf{v}\in\mathcal{A}$ es un gradiente ($\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$), entonces

$$K\{\mathbf{v}\}\le K\{\mathbf{g}\}\quad\forall\,\mathbf{g}\in\mathcal{A},$$

   y que la igualdad se da solamente cuando $\mathbf{g}=\mathbf{v}$.

   Solución. Notemos que el problema (P) tiene solución si $\int_{\partial\mathcal{R}}\rho\lambda\,dA=0$ (ver la Nota al final del ejercicio), y en ese caso nos situamos para que $\mathcal{A}$ sea no vacío.
   Supongamos que $\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi$ pertenece a $\mathcal{A}$. Puesto que $\mathbf{v}$ es solución de (P), se cumplen

$$\rho\Delta\varphi+\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\rho=0\quad\text{en } \mathcal{R}, \tag{245}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}=\lambda\quad\text{en } \partial\mathcal{R}. \tag{246}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
K\{\mathbf{v}\} = \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho \, dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} (\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi)\rho \, dV \overset{(*)}{=} \\
\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} (\varphi\rho\varphi_{,i})_{,i} \, dV = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi\rho\varphi_{,i} n_i \, dA = \\
\frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \, dA = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi\rho\lambda \, dA,
\end{aligned} \tag{247}
$$

donde la igualdad $(*)$ se sigue de la ecuación (245) de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
(\varphi\rho\varphi_{,i})_{,i} = \varphi_{,i}\rho\varphi_{,i} + \varphi(\rho\varphi_{,i})_{,i} = \varphi_{,i}\rho\varphi_{,i} + \varphi[\rho_{,i}\varphi_{,i} + \rho\varphi_{,ii}] = \\
(\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi)\rho + \varphi[\operatorname{grad}\rho \cdot \operatorname{grad}\varphi + \rho\Delta\varphi] = (\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi)\rho.
\end{aligned} \tag{248}
$$

Sea ahora $\mathbf{g} \in \mathcal{A}$. Entonces $\operatorname{div}(\rho\mathbf{g}) = 0$ en $\mathcal{R}$ y $\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = \lambda$ en $\partial\mathcal{R}$, con lo cual

$$
\begin{aligned}
K\{\mathbf{v}\} = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi\rho\lambda \, dA = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi\rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} \, dA = \\
\frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \varphi\rho g_i n_i \, dA = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} (\varphi\rho g_i)_{,i} \, dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}) \, dV,
\end{aligned} \tag{249}
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
(\varphi\rho g_i)_{,i} = \varphi_{,i}\rho g_i + \varphi(\rho g_i)_{,i} = \rho(\mathbf{g}\cdot\operatorname{grad}\varphi) + \varphi\operatorname{div}(\rho\mathbf{g}) = \\
\rho(\mathbf{g}\cdot\operatorname{grad}\varphi) = \rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}).
\end{aligned} \tag{250}
$$

Es decir, se cumple

$$
\int_{\mathcal{R}} \rho(\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}) \, dV = 2K\{\mathbf{v}\}. \tag{251}
$$

Sea ahora $\mathbf{f} = \mathbf{g} - \mathbf{v}$. Se tiene, en virtud de (251),

$$
\begin{aligned}
K\{\mathbf{f}\} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{f}^2\rho \, dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{g}-\mathbf{v})^2\rho \, dV = \\
\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{g}^2\rho \, dV - \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{v})\rho \, dV + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{v}^2\rho \, dV = \\
K\{\mathbf{g}\} - 2K\{\mathbf{v}\} + K\{\mathbf{v}\} = K\{\mathbf{g}\} - K\{\mathbf{v}\}.
\end{aligned} \tag{252}
$$

Como $K\{\mathbf{f}\} \geq 0$, se concluye de (252) que $K\{\mathbf{v}\} \leq K\{\mathbf{g}\}$ y, además,

$$
K\{\mathbf{v}\} = K\{\mathbf{g}\} \iff K\{\mathbf{f}\} = 0 \iff \mathbf{f} = \mathbf{0} \iff \mathbf{g} = \mathbf{v}, \tag{253}
$$

como queríamos demostrar. ■

Nota *El Teorema de Kelvin prueba la unicidad de soluciones gradiente para la ecuación de conservación de la masa en el caso estacionario; más precisamente, para el problema* (P) *del ejercicio 4.*

Para probar la existencia podemos proceder del siguiente modo:

En primer lugar notemos que la condición $\int_{\partial\mathcal{R}} \rho\lambda \, dA = 0$ *es necesaria para que haya soluciones, como se ve integrando la igualdad* $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ *y aplicando el teorema de la divergencia.*

Busquemos soluciones de la forma $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$. *Entonces* (P) *tiene soluciones si las tiene el problema elíptico (245)-(246), lo cual se sigue de [8, Theorem 7] con la condición de que* $\int_{\partial\mathcal{R}} \rho\lambda \; dA = 0$. *Ahora [6, Proposition 1] nos dice que todas las soluciones de (245)-(246) difieren en una constante, lo que prueba unicidad para* (P) *de soluciones gradiente (como decíamos más arriba, esto se deduce también del Teorema de Kelvin).*

Otra aproximación al problema es la de [12, Theorem 2], que nos da la existencia de una $\mathbf{v}$ *(no necesariamente gradiente) solución de* (P). *Para ello basta tomar* $\mathbf{w}$ *definida en* $\mathcal{R}$ *tal que* $\mathbf{w}_{|\partial\mathcal{R}} = \rho\lambda\mathbf{n}$, *y considerar el problema*

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{u} = g & \textit{en } \mathcal{R}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \textit{en } \partial\mathcal{R}, \end{cases}$$

donde $g = \operatorname{div}\mathbf{w}$. *Si* $\int_{\partial\mathcal{R}} \rho\lambda \; dA = 0$, *el problema anterior tiene solución* $\mathbf{u}$ *en virtud de [12, Theorem 2], y entonces* $\mathbf{v} = (\mathbf{w}-\mathbf{u})/\rho$ *es solución de* (P).

Para la existencia de solución de la ecuación de la divergencia pueden consultarse también las referencias [5], [10] y [11].

(En esta nota se ha supuesto que los datos tienen la regularidad suficiente para que los resultados citados sean válidos.)

13. MOMENTOS LINEAL Y ANGULAR. CENTRO DE MASA

En los ejercicios de esta sección $\mathcal{B}$ *es acotado.*

1. Probar que
$$\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{z} = \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x}-\mathbf{z})\rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}}$$
para todo punto $\mathbf{z}$, de modo que la definición de centro de masa $\boldsymbol{\alpha}(t)$ es independiente de la elección del origen.

Solución. Notemos que $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}}$ y que, si elegimos un origen $\mathbf{o}$, el centro de masa $\boldsymbol{\alpha}(t)$ está definido por la igualdad

$$\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{o} = \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x}-\mathbf{o})\rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}}. \tag{254}$$

Entonces, si $\mathbf{z}$ es un punto cualquiera del espacio,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{z} = (\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{o}) + (\mathbf{o}-\mathbf{z}) = \\ \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x}-\mathbf{o})\rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}} + \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{o}-\mathbf{z})\rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}} = \\ \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}_t} [(\mathbf{x}-\mathbf{o}) + (\mathbf{o}-\mathbf{z})]\rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}} = \\ \frac{1}{m(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x}-\mathbf{z})\rho(\mathbf{x},t) \; dV_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \tag{255}$$

como queríamos ver. ∎

2. Otros tipos de momentos de interés son el *momento angular* $\mathbf{a}_\mathbf{z}(t)$ *relativo a un punto móvil* $\mathbf{z}(t)$ y el *momento angular de "spin" o de giro* $\mathbf{a}_{\text{spin}}(t)$:

$$\mathbf{a}_\mathbf{z}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_\mathbf{z} \times \mathbf{v}\rho \, dV,$$
$$\mathbf{a}_{\text{spin}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho \, dV.$$

Aquí $\mathbf{r}_\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{z}(t)$ es el vector de posición con origen en $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(t)$ es el vector de posición con origen en el centro de masa $\boldsymbol{\alpha}(t)$ y $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\mathbf{r}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{v} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ es la velocidad relativa a $\boldsymbol{\alpha}(t)$.
Por comodidad, escribiremos $\mathbf{l}(t) = \mathbf{l}(\mathcal{B}, t)$ (el momento lineal de $\mathcal{B}$ en el instante t) y $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(\mathcal{B}, t)$ (el momento angular de $\mathcal{B}$ en el instante t). Probar:

a) $\mathbf{a}_\mathbf{z} = \mathbf{a}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \mathbf{l}$,

b) $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{o}) \times \dot{\mathbf{l}}$.

El término $(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \mathbf{l}$ suele denominarse el *momento orbital en torno a* $\mathbf{z}$; representa el momento angular que tendría $\mathcal{B}$ si toda su masa estuviese concentrada en el centro de masa.

Solución. Recordemos que $\mathbf{l}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}\rho \, dV$ y que $\mathbf{a}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{v}\rho \, dV$.

a) Es claro que

$$\mathbf{a}_{\text{spin}} = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \times (\mathbf{v} - \dot{\boldsymbol{\alpha}})\rho \, dV =$$
$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{v}\rho \, dV - \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \times \dot{\boldsymbol{\alpha}}\rho \, dV =$$
$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{v}\rho \, dV, \quad (256)$$

ya que, en virtud del ejercicio 1,

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \times \dot{\boldsymbol{\alpha}}\rho \, dV = \left(\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})\rho \, dV \right) \times \dot{\boldsymbol{\alpha}} =$$
$$m(\mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (257)$$

Teniendo en cuenta que $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{v}\rho = (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{v}\rho + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{v}\rho$, se obtiene de (256) que

$$\mathbf{a}_{\text{spin}} = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \times \mathbf{v}\rho \, dV + \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{v}\rho \, dV =$$
$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_\mathbf{z} \times \mathbf{v}\rho \, dV + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}) \times \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}\rho \, dV = \mathbf{a}_\mathbf{z} + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}) \times \mathbf{l}, \quad (258)$$

y por lo tanto $\mathbf{a}_\mathbf{z} = \mathbf{a}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \mathbf{l}$, como queríamos ver.

b) En este apartado usamos el hecho de que si $\mathbf{\Phi}$ es un campo vectorial regular, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{\Phi}\rho\, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \dot{\mathbf{\Phi}}\rho\, dV. \tag{259}$$

De (259) y de (256) se sigue

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} = \int_{\mathcal{B}_t} [(\mathbf{v}-\dot{\boldsymbol{\alpha}})\times\mathbf{v} + (\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{v}}]\rho\, dV =\\ \int_{\mathcal{B}_t} -\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times\mathbf{v}\rho\, dV + \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV =\\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{v}\rho\, dV + \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV =\\ -\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV =\\ \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV =\\ \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{x}-\mathbf{o})\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV + \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{o}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV =\\ \dot{\mathbf{a}} + (\mathbf{o}-\boldsymbol{\alpha})\times\dot{\mathbf{l}},\end{aligned} \tag{260}$$

donde hemos usado las relaciones siguientes:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \frac{1}{m(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{v}\rho\, dV, \tag{261}$$

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV, \tag{262}$$

$$\dot{\mathbf{l}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t}\dot{\mathbf{v}}\rho\, dV. \tag{263}$$

Ahora se deduce inmediatamente de (260) que $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{o})\times\dot{\mathbf{l}}$, como queríamos demostrar. ■

3. Consideremos un movimiento rígido x de $\mathcal{B}$. En virtud de los ejercicios 9.2 y 9.3,

$$\mathsf{x}_0(\mathbf{y},t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \tag{264}$$

para todo $\mathbf{y}\in\mathcal{B}_0$ y para todo $t\in\mathbb{R}$, donde $\mathbf{q}$ y $\mathbf{Q}$ son de clase C^3 y $\mathbf{Q}(t)$ es una rotación para todo t. (Aquí x_0 es el movimiento relativo al tiempo $\tau = 0$, como se definió en el ejercicio 9.1.)
Se pide:

a) Probar que

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0)-\mathbf{z}],$$

y por lo tanto (nótese que $\mathsf{x}_0(\mathbf{y},t)$ puede definirse para todo $\mathbf{y}\in\mathcal{E}$)

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathsf{x}_0(\boldsymbol{\alpha}(0),t).$$

¿Cuál es el significado de esta última igualdad?

b) Probar que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ es el vector axial de $\dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T$ y que $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}$.

c) Una función vectorial $\mathbf{k}$ definida en $\mathbb{R}$ *rota con el cuerpo* si

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{k}(0)$$

para todo t. Notar que $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$, ya que $\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y}$. Pruébese que $\mathbf{k}$ rota con el cuerpo si, y solo si,

$$\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

d) Usar la identidad $\mathbf{f} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{f}^2\mathbf{I} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{f})\mathbf{d}$ (ver ejercicios complementarios) para demostrar que $\mathbf{a}_{\text{spin}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, donde

$$\mathbf{J}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\mathbf{I} - \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\rho \; dV$$

es el *tensor de inercia de* $\mathcal{B}_t$ *relativo al centro de masa*.

e) Probar que

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{J}(0)(\mathbf{Q}(t))^T,$$

y usar esa igualdad para demostrar que la matriz $[\mathbf{J}(t)]$ asociada al tensor $\mathbf{J}(t)$, relativa a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ cualquiera que rota con el cuerpo, es independiente de t.

f) Constrúyase una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ que rote con el cuerpo para la cual se obtenga

$$[\mathbf{J}] = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

En tal caso $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ se llama *base principal de inercia* y las componentes diagonales J_i se llaman *momentos de inercia*.
Sean $\omega_i(t)$ las componentes de $\boldsymbol{\omega}(t)$ con respecto a $\{\mathbf{e}_i(t)\}$. Pruébese que las componentes de $\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}}(t)$ con respecto a esa base son

$$\begin{aligned}
(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_1 &= J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3,\\
(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_2 &= J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3,\\
(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_3 &= J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2.
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

a) Según el ejercicio 12.3,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{o} = \frac{1}{m(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{o})\rho(\mathbf{x}, t) \; dV_{\mathbf{x}} =\\
\frac{1}{m(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}_0} [\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, t) - \mathbf{o}]\rho(\mathbf{y}, 0) \; dV_{\mathbf{y}}.
\end{aligned} \tag{265}$$

Entonces, por (264),

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{o} = \frac{1}{m(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}_0} \{[\mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z})] - \mathbf{o}\}\rho(\mathbf{y}, 0) \; dV_{\mathbf{y}} =\\
\frac{1}{m(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}_0} [(\mathbf{q}(t) - \mathbf{o}) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z})]\rho(\mathbf{y}, 0) \; dV_{\mathbf{y}} =\\
(\mathbf{q}(t) - \mathbf{o}) + \mathbf{Q}(t)\left(\frac{1}{m(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{y} - \mathbf{z})\rho(\mathbf{y}, 0) \; dV_{\mathbf{y}}\right) \overset{(*)}{=}\\
(\mathbf{q}(t) - \mathbf{o}) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}] = \{\mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}]\} - \mathbf{o},
\end{aligned} \tag{266}$$

donde en (∗) hemos usado el ejercicio 1. De (266) se obtiene

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}] = \mathsf{x}_0(\boldsymbol{\alpha}(0), t). \tag{267}$$

La ecuación (267) significa que el centro de masa se transporta con el movimento cuando éste es rígido.

b) Para movimientos rígidos el gradiente de la velocidad es antisimétrico y no depende de $\mathbf{x}$: $\operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}(t) \in \mathrm{Skw}$. Además, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ es el vector axial de $\mathbf{W}(t)$. Veremos que $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T$. Como $\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, se tiene por el ejercicio 9.1 que

$$\mathbf{v}(\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \tag{268}$$

para $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_0$ y $t \in \mathbb{R}$. Para $\mathbf{x} \in B_t$, sea $\mathbf{y} \in B_0$ tal que $\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x}$. Notemos que entonces $\mathbf{y} - \mathbf{z} = (\mathbf{Q}(t))^T[\mathbf{x} - \mathbf{q}(t)]$ y por lo tanto

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T[\mathbf{x} - \mathbf{q}(t)], \tag{269}$$

de donde $\mathbf{W}(t) = \operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T$.

Ahora veremos que $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Por el apartado (a) sabemos que $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}]$, y entonces $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}]$ y $\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z} = (\mathbf{Q}(t))^T[\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{q}(t)]$, con lo cual

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= \\ \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T[\mathbf{x} - \mathbf{q}(t)] - \dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{Q}}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}] &= \\ \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T[\mathbf{x} - \mathbf{q}(t)] - \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T[\boldsymbol{\alpha}(t) - \mathbf{q}(t)] &= \\ \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T[\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(t)] = \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{270}$$

como queríamos ver.

c) Si $\mathbf{k}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{k}(0)$,

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{k}(0) = \dot{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{Q}(t))^T\mathbf{k}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{k}(t). \tag{271}$$

Luego $\mathbf{k}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{k}(0)$ es la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}(0) \text{ dado.} \end{cases} \tag{272}$$

d) Usamos el apartado (b) y la igualdad $\mathbf{f} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{f}) = (\mathbf{f}^2\mathbf{I} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{f})\mathbf{d}$ (ver ejercicios complementarios).

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathrm{spin}} = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\rho \, dV &= \\ \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\mathbf{I} - \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\boldsymbol{\omega}\rho \, dV &= \mathbf{J}(t)\boldsymbol{\omega}(t). \end{aligned} \tag{273}$$

e) Recordemos que

$$\mathsf{x}_0(\mathbf{y}, t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{z}), \tag{274}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)[\boldsymbol{\alpha}(0) - \mathbf{z}], \tag{275}$$

$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(t). \tag{276}$$

Entonces

$$\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathsf{x}_0(\mathbf{y},t),t) = \mathsf{x}_0(\mathbf{y},t) - \boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{Q}(t)[\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)]. \tag{277}$$

Por otra parte, las igualdades $(\mathbf{Sa}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$ y $\mathbf{a} \otimes (\mathbf{Sb}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}^T$ implican que $(\mathbf{Sa}) \otimes (\mathbf{Sb}) = \mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}^T$.
Entonces, usando el ejercicio 12.3,

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\rho\ dV = \\
\int_{\mathcal{B}_t} \left\{ [\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(t)]^2 \mathbf{I} - [\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(t)] \otimes [\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(t)] \right\} \rho(\mathbf{x},t)\ dV_{\mathbf{x}} = \\
\int_{\mathcal{B}_0} \left\{ [\mathsf{x}_0(\mathbf{y},t) - \boldsymbol{\alpha}(t)]^2 \mathbf{I} - [\mathsf{x}_0(\mathbf{y},t) - \boldsymbol{\alpha}(t)] \otimes [\mathsf{x}_0(\mathbf{y},t) - \boldsymbol{\alpha}(t)] \right\} \rho(\mathbf{y},0)\ dV_{\mathbf{y}} = \\
\int_{\mathcal{B}_0} \left\{ (\mathbf{Q}(t)[\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)])^2 \mathbf{I} - \mathbf{Q}(t)[\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)] \otimes \mathbf{Q}(t)[\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)] \right\} \rho(\mathbf{y},0)\ dV_{\mathbf{y}} = \\
\int_{\mathcal{B}_0} \left\{ [\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)]^2 \mathbf{I} - \mathbf{Q}(t)([\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)] \otimes [\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)])(\mathbf{Q}(t))^T \right\} \rho(\mathbf{y},0)\ dV_{\mathbf{y}} = \\
\mathbf{Q}(t) \left(\int_{\mathcal{B}_0} \left\{ [\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)]^2 \mathbf{I} - [\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)] \otimes [\mathbf{y} - \boldsymbol{\alpha}(0)] \right\} \rho(\mathbf{y},0)\ dV_{\mathbf{y}} \right) (\mathbf{Q}(t))^T = \\
\mathbf{Q}(t)\mathbf{J}(0)(\mathbf{Q}(t))^T.
\end{aligned} \tag{278}$$

Ahora, si $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{1 \leq i \leq 3}$ es una base ortonormal que rota con el cuerpo; es decir, $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i(0)$, resulta que la componente (i,j) de $J(t)$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_i(t) \cdot \mathbf{J}(t)\mathbf{e}_j(t) = \mathbf{e}_i(t) \cdot \mathbf{Q}(t)\mathbf{J}(0)(\mathbf{Q}(t))^T \mathbf{e}_j(t) = \\
(\mathbf{Q}(t))^T \mathbf{e}_i(t) \cdot \mathbf{J}(0)(\mathbf{Q}(t))^T \mathbf{e}_j(t) = \mathbf{e}_i(0) \cdot \mathbf{J}(0)\mathbf{e}_j(0),
\end{aligned} \tag{279}$$

la componente (i,j) de $\mathbf{J}(0)$, que es independiente de t.

f) Sabemos que $\mathbf{J}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{J}(0)(\mathbf{Q}(t))^T$ y que $\mathbf{J}(t)$ es simétrico para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{J}(0)$ es simétrico, existe $\{\mathbf{e}_i(0)\}$ base ortonormal de V formada por autovectores de $\mathbf{J}(0)$. Definamos, para $i = 1,2,3$ y $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i(0)$. La definición es coherente porque $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$.
A continuación comprobamos que $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ es una base ortonormal de V formada por aurovectores de $\mathbf{J}(t)$ que rotan con el cuerpo:

1) $\mathbf{e}_i(t)$ rota con el cuerpo porque $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i(0)$.
2) $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ es base ortonormal de V porque lo es $\{\mathbf{e}_i(0)\}$, y porque $\mathbf{Q}(t)$ es ortogonal.
3) Veamos que $\mathbf{e}_i(t)$ es autovector de $\mathbf{J}(t)$. Como $\mathbf{e}_i(0)$ es autovector de $\mathbf{J}(0)$, $\mathbf{J}(0) = \lambda_i \mathbf{e}_i(0)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(t)\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{J}(0)(\mathbf{Q}(t))^T \mathbf{e}_i(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{J}(0)\mathbf{e}_i(0) = \\
\lambda_i \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i(0) = \lambda_i \mathbf{e}_i(t).
\end{aligned} \tag{280}$$

En consecuencia, el apartado (e) nos dice que la matriz de $\mathbf{J}(t)$ es la matriz de $\mathbf{J}(0)$; es decir, $\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}(0) = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$, donde $J_i = \lambda_i$.
Para la última parte del ejercicio se considera $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_i(t)\mathbf{e}_i(t)$. Por el apartado (d), $\mathbf{a}_{\mathrm{spin}}(t) = \mathbf{J}(t)\boldsymbol{\omega}(t) = J_i \omega_i(t)\mathbf{e}_i(t)$, y por lo tanto, usando el apartado (c),

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{a}}_{\mathrm{spin}}(t) = J_i \dot{\omega}_i(t)\mathbf{e}_i(t) + J_i \omega_i(t)\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \\
J_i \dot{\omega}_i(t)\mathbf{e}_i(t) + J_i \omega_i(t)[\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_i(t)],
\end{aligned} \tag{281}$$

de donde se obtiene

$$(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_1 = J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3, \tag{282}$$
$$(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_2 = J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3, \tag{283}$$
$$(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_3 = J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2, \tag{284}$$

teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_1(t) = \omega_3(t)\mathbf{e}_2(t) - \omega_2(t)\mathbf{e}_3(t), \tag{285}$$
$$\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_2(t) = -\omega_3(t)\mathbf{e}_1(t) + \omega_1(t)\mathbf{e}_3(t), \tag{286}$$
$$\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_3(t) = \omega_2(t)\mathbf{e}_1(t) - \omega_1(t)\mathbf{e}_2(t). \tag{287}$$

Nótese que $\mathbf{a}_{\text{spin}}(t) = (\mathbf{a}_{\text{spin}})_i(t)\mathbf{e}_i(t)$ y $\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}}(t) = (\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_i(t)\mathbf{e}_i(t)$, pero $(\dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}})_i(t)$ *no es* la derivada de $(\mathbf{a}_{\text{spin}})_i(t)$, porque la base $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ depende de t. ■

4. Definamos la *energía cinética* $K(t)$ y la *energía cinética relativa* $K_{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ con las igualdades

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}^2\rho\, dV, \qquad K_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\rho\, dV.$$

a) **(Teorema de König)** Probar el *teorema de König*:

$$K = K_{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}}^2.$$

b) Considérese un movimiento rígido. Usar la identidad

$$(\mathbf{d} \times \mathbf{f})^2 = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{f}^2\mathbf{I} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{f})\mathbf{d}$$

para demostrar que

$$K_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

Solución.

a) Sabemos que $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = (1/m(\mathcal{B}))\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}\rho\, dV$ y que $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{v} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}$, con lo cual

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho\, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}\rho\, dV - \int_{\mathcal{B}_t} \dot{\boldsymbol{\alpha}}\rho\, dV = m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}} - m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}. \tag{288}$$

Usando (288),

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}^2\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}})^2\rho\, dV =$$
$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\rho\, dV + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^2\rho\, dV + \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}})\rho\, dV =$$
$$K_{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}}^2 + \left(\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho\, dV\right) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} = K_{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1}{2}m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}}^2, \tag{289}$$

como queríamos ver.

b) Puesto que el movimiento es rígido, se tiene por el apartado (b) del ejercicio 3 que

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x},.t). \tag{290}$$

Entonces, usando la igualdad $(\mathbf{d}\times\mathbf{f})^2=\mathbf{d}\cdot(\mathbf{f}^2\mathbf{I}-\mathbf{f}\otimes\mathbf{f})\mathbf{d}$ (ver ejercicios complementarios),

$$\begin{aligned}K_{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\rho\,dV=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})^2\rho\,dV=\\ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}_t}[\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\mathbf{I}-\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\boldsymbol{\omega}]\rho\,dV=\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\mathbf{I}-\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\rho\,dV\right)\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\boldsymbol{\omega},\end{aligned} \tag{291}$$

como se quería demostrar. ■

5. Probar que

$$\mathbf{J}=(\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{I}-\mathbf{M},$$

donde

$$\mathbf{M}(t)=\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho\,dV$$

recibe el nombre de *tensor de Euler*.

Solución. Notemos en primer lugar que

$$\operatorname{tr}\mathbf{M}=\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\rho\,dV, \tag{292}$$

ya que $\operatorname{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{I}-\mathbf{M}=\left(\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\rho\,dV\right)\mathbf{I}-\int_{\mathcal{B}_t}\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\rho\,dV=\\ \int_{\mathcal{B}_t}(\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\mathbf{I}-\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}})\rho\,dV=\mathbf{J},\end{aligned} \tag{293}$$

como queríamos ver. ■

Ejercicios complementarios

c.1. Probar que se cumple

$$\mathbf{f}\times(\mathbf{d}\times\mathbf{f})=(\mathbf{f}^2\mathbf{I}-\mathbf{f}\otimes\mathbf{f})\mathbf{d},$$

donde **f** y **d** son vectores.

Solución. Usando las expresiones en coordenadas del producto vectorial y tensorial, se tiene

$$\begin{aligned}[\mathbf{f} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{f})]_i = \varepsilon_{ijk} f_j (\mathbf{d} \times \mathbf{f})_k = \varepsilon_{ijk} f_j \varepsilon_{klm} d_l f_m = \\ \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} f_j d_l f_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) f_j d_l f_m = \\ f_j d_i f_j - f_j d_j f_i = [\mathbf{f}^2 \mathbf{d} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{d})\mathbf{f}]_i = [(\mathbf{f}^2 \mathbf{I} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{f})\mathbf{d}]_i,\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

c.2. Probar que se cumple

$$(\mathbf{d} \times \mathbf{f})^2 = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{f}^2 \mathbf{I} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{f})\mathbf{d},$$

donde **f** y **d** son vectores.

Solución. Nótese que

$$\begin{aligned}(\mathbf{d} \times \mathbf{f})^2 = \varepsilon_{ijk} d_j f_k \varepsilon_{ilm} d_l f_m = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) d_j d_l f_k f_m = \\ d_j d_j f_k f_k - d_j d_k f_k f_j = \mathbf{d}^2 \mathbf{f}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{f})^2.\end{aligned} \tag{294}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{d} \cdot (\mathbf{f}^2 \mathbf{I} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{f})\mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot [\mathbf{f}^2 \mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{f})\mathbf{f}] = \mathbf{d}^2 \mathbf{f}^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{f})^2, \tag{295}$$

lo que da la igualdad pedida. ■

Capítulo V

Fuerza

14. FUERZA. TENSIÓN. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

1. Sea $\mathcal{B}$ un cuerpo acotado. El *momento* $\mathbf{m_z}(t)$ *en torno a un punto móvil* $\mathbf{z}(t)$ es

$$\mathbf{m_z}(t) = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{r_z} \times \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r_z} \times \mathbf{b}\, dV,$$

donde $\mathbf{r_z}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{z}(t)$ es el vector de posición relativo a $\mathbf{z}(t)$ (ver ejercicio 13.2).

a) Sea $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(\mathcal{B}, t)$. Pruébese que $\mathbf{m_z} = \mathbf{m_y} + (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \times \mathbf{f}$ para cualquier función $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathcal{E}$.

b) Sea $\mathbf{l}(t) = \mathbf{l}(\mathcal{B}, t)$. Probar que $\mathbf{m_z} = \dot{\mathbf{a}}_\mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}} \times \mathbf{l}$ y que $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}}$, donde

$$\mathbf{a_z}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{r_z} \times \mathbf{v})\rho\, dV$$

y

$$\mathbf{a}_{\text{spin}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{r}_{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}})\rho\, dV,$$

tal y como se definieron en el ejercicio 13.2, son respectivamente el momento angular con respecto al punto móvil $\mathbf{z}(t)$ y el momento angular de giro o de "spin".

Solución.

a) Basta tener en cuenta la definición de $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA_\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b}\, dV_\mathbf{x}. \tag{296}$$

b) Como $\mathbf{m_o} = \mathbf{m}$, el apartado (a) y las leyes de conservación del momento lineal ($\mathbf{f} = \dot{\mathbf{l}}$) y angular ($\mathbf{m} = \dot{\mathbf{a}}$) nos dicen que

$$\mathbf{m_z} = \mathbf{m} + (\mathbf{o} - \mathbf{z}) \times \mathbf{f} = \dot{\mathbf{a}} + (\mathbf{o} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}}. \tag{297}$$

Por ejercicio 13.2 también sabemos que

$$\mathbf{a_z} = \mathbf{a}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \mathbf{l}, \tag{298}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{o}) \times \dot{\mathbf{l}}. \tag{299}$$

Nótese que $\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{l} = \mathbf{0}$, porque $\mathbf{l} = m(\mathcal{B})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Entonces, de la ecuación (298) se deduce que

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\mathbf{z}}) \times \mathbf{l} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} - \dot{\mathbf{z}} \times \mathbf{l} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}}, \tag{300}$$

y ahora de (299) y de (300) se obtiene

$$\mathbf{m_z} = \dot{\mathbf{a}} + (\mathbf{o} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{o}) \times \dot{\mathbf{l}} + (\mathbf{o} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}} \times \mathbf{l}. \tag{301}$$

Para demostrar la identidad que falta téngase en cuenta que, como se ve en la expresión anterior, $\mathbf{m_z} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}} + (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{z}) \times \dot{\mathbf{l}}$, y por lo tanto $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}}$, como queríamos demostrar. ∎

2. Probar que las leyes de conservación de los momentos se cumplen para cualquier elección del origen (constante en el tiempo) si se cumplen para una tal elección.

Solución. La ley de conservación del momento lineal $\mathbf{f} = \dot{\mathbf{l}}$ es independiente de la elección del origen, ya que

$$\mathbf{f} = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}\, dV, \qquad \dot{\mathbf{l}} = \int_{\mathcal{P}_t} \dot{\mathbf{v}} \rho\, dV. \tag{302}$$

La ley de conservación del momento angular afirma que $\mathbf{m} = \dot{\mathbf{a}}$, donde

$$\mathbf{m} = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b}\, dV, \qquad \dot{\mathbf{a}} = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \rho\, dV \tag{303}$$

y $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{o}$, para un origen $\mathbf{o}$. Si la ley se cumple para $\mathbf{o}$, el ejercicio 1 nos dice que $\mathbf{m_z} = \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}} \times \mathbf{l}$, de modo que se tiene

$$\mathbf{m_z} = \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \tag{304}$$

cuando $\mathbf{z}$ no depende de t. Ahora solo falta comprobar que (304) es la ley de conservación del momento angular para el origen $\mathbf{z}$. En efecto,

$$\mathbf{m_z} = \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{r_z} \times \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r_z} \times \mathbf{b}\, dV \tag{305}$$

y

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r_z} \times \dot{\mathbf{v}} \rho\, dV, \tag{306}$$

ya que

$$\mathbf{a_z} = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r_z} \times \mathbf{v} \rho\, dV. \tag{307}$$

(Ver último teorema de la sección 13 de [2].) ∎

3. Demostrar que el tensor de tensiones de Cauchy queda determinado de modo único por el sistema de fuerzas.

   SOLUCIÓN. Como $\mathbf{Tn} = \mathbf{s}(\mathbf{n})$ para todo vector unitario $\mathbf{n}$, resulta que

   $$\mathbf{Tu} = |\mathbf{u}|\ \mathbf{T}(\mathbf{u}/|\mathbf{u}|) = |\mathbf{u}|\ \mathbf{s}(\mathbf{u}/|\mathbf{u}|) \tag{308}$$

   para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, de modo que $\mathbf{T}$ está determinado por $\mathbf{s}$. ■

4. **(Sólido rígido)** Sea $\mathcal{B}$ un cuerpo acotado sometido a un movimiento rígido de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Sea $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ una base principal de inercia y sean J_1, J_2, J_3 los momentos de inercia relativos al centro de masa (ver ejercicio 13.3). Sean además $\omega_i(t)$ y $m_i(t)$ las componentes de $\boldsymbol{\omega}(t)$ y de $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ en la base $\{\mathbf{e}_i(t)\}$. Dedúzcanse las *ecuaciones de Euler*

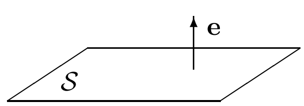
   $$\begin{aligned} m_1 &= J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3, \\ m_2 &= J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3, \\ m_3 &= J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

   Esas ecuaciones, con el complemento de $\mathbf{f} = m(\mathcal{B})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}$, constituyen las ecuaciones básicas de la mecánica del sólido rígido. Cuando se conocen $\mathbf{f}$ y $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\alpha}}$, proporcionan un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias para $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$.

   SOLUCIÓN. En el ejercicio 1 se probó que $\mathbf{m}_{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\mathbf{a}}_{\text{spin}}$. Ahora las ecuaciones de Euler son consecuencia del apartado (f) del ejercicio 13.3. ■

5. Sea $\mathbf{T}$ el tensor de tensiones de Cauchy en un determinado lugar y tiempo. Supongamos que la fuerza superficial sobre un plano $\mathcal{S}$ es perpendicular a $\mathcal{S}$, mientras que la fuerza superficial sobre cualquier plano perpendicular a $\mathcal{S}$ es nula. Probar que $\mathbf{T}$ es una *tensión pura*.

   SOLUCIÓN.

   Sea $\mathbf{e}$ un vector unitario normal a $\mathcal{S}$. La fuerza superficial ejercida sobre $\mathcal{S}$ por unidad de área es $\mathbf{Te}$.

   Sabemos que $\mathbf{Te} = \sigma\mathbf{e}$ y que $\mathbf{Tk} = \mathbf{0}$ para todo vector unitario $\mathbf{k}$ paralelo a $\mathcal{S}$ o, lo que es lo mismo, perpendicular a $\mathbf{e}$. Además, $\mathbf{T} \in \mathrm{Sym}$, de modo que, en virtud del teorema espectral,

   $$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}; \tag{309}$$

   es decir, $\mathbf{T}$ es una tensión pura. ■

6. Sea $\mathbf{T}$ un *corte puro*. Calcular los correspondientes esfuerzos y direcciones principales.

Solución. Un corte puro es de la forma

$$\mathbf{T} = \tau(\mathbf{k} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{k}), \tag{310}$$

con $\mathbf{k}$ y $\mathbf{n}$ ortogonales y unitarios. Los esfuerzos principales son los autovalores de $\mathbf{T}$ y las direcciones principales vienen marcadas por los correspondientes autovectores. Según el ejercicio 2.1,

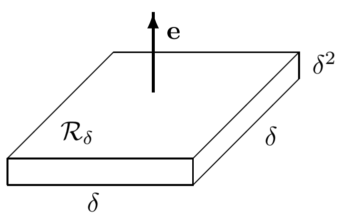
TENSIONES PRINCIPALES	DIRECCIONES PRINCIPALES
0	$\mathbf{e}$,
τ	$(\mathbf{k}+\mathbf{n})/\sqrt{2}$,
$-\tau$	$(\mathbf{k}-\mathbf{n})/\sqrt{2}$,

donde $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{e} \in \langle \mathbf{k}, \mathbf{n}\rangle^{\perp}$, y donde se ha tenido en cuenta que $|\mathbf{k}+\mathbf{n}| = |\mathbf{k}-\mathbf{n}| = \sqrt{2}$. ■

7. Pruébese directamente que $\mathbf{s}(\mathbf{e}, \mathbf{x}_0) = -\mathbf{s}(-\mathbf{e}, \mathbf{x}_0)$ aplicando la ley de conservación del momento lineal

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b}\ dV = \int_{\mathcal{P}_t} \dot{\mathbf{v}}\rho\ dV$$

a la parte $\mathcal{P}$ que ocupa la región $\mathcal{R}_\delta$ en el instante t.



Aquí $\mathcal{R}_\delta$ es la región rectangular de dimensiones $\delta \times \delta \times \delta^2$ que está centrada en $\mathbf{x}_0$ y es tal que el vector unitario $\mathbf{e}$ es perpendicular a las caras de dimensiones $\delta \times \delta$.

Solución. Llamemos $(\partial\mathcal{R}_\delta)_1$ a la parte de $\partial\mathcal{R}_\delta$ cuya normal exterior unitaria es $\mathbf{e}$, y sea $(\partial\mathcal{R}_\delta)_2$ la parte de $\partial\mathcal{R}_\delta$ cuya normal exterior unitaria es $-\mathbf{e}$. Sean $(\partial\mathcal{R}_\delta)_i$, para $i = 3, 4, 5, 6$, las caras restantes. Las áreas de las caras valen

$$\mathrm{ar}[(\partial\mathcal{R}_\delta)_1] = \mathrm{ar}[(\partial\mathcal{R}_\delta)_2] = \delta^2, \tag{311}$$

$$\mathrm{ar}[(\partial\mathcal{R}_\delta)_i] = \delta^3 \quad \text{para } i \in \{3,4,5,6\}, \tag{312}$$

y el volumen de $\mathcal{R}_\delta$ es

$$\mathrm{vol}(\mathcal{R}_\delta) = \delta^4. \tag{313}$$

En virtud de la ley de conservación del momento lineal,

$$\int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_1} \mathbf{s}(\mathbf{e}, \mathbf{x})\ dA + \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_2} \mathbf{s}(-\mathbf{e}, \mathbf{x})\ dA =$$

$$\int_{\mathcal{R}_\delta} (\dot{\mathbf{v}}\rho - \mathbf{b})\ dV - \sum_{i=3}^{6} \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_i} \mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA, \tag{314}$$

de donde, por (312) y (313),

$$\left| \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_1} \mathbf{s}(\mathbf{e},\mathbf{x})\ dA + \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_2} \mathbf{s}(-\mathbf{e},\mathbf{x})\ dA \right| \leq K_1\delta^4 + K_2\delta^3, \tag{315}$$

con $K_1 = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}_\delta} |\dot{\mathbf{v}}\rho - \mathbf{b}|$ y $K_2 = \max_{3\leq i\leq 6} \left(\max_{\mathbf{x}\in(\partial\mathcal{R}_\delta)_i} |\mathbf{s}(\mathbf{n},\mathbf{x})|\right)$, que son números reales porque $\dot{\mathbf{v}}$, ρ, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{s}$ son continuas en la variable $\mathbf{x}$ y $\mathcal{R}_\delta$ y $(\partial\mathcal{R}_\delta)_i$ son compactos. De (315) se deduce que

$$\lim_{\delta\to 0} \left(\frac{1}{\delta^2} \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_1} \mathbf{s}(\mathbf{e},\mathbf{x})\ dA + \frac{1}{\delta^2} \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_2} \mathbf{s}(-\mathbf{e},\mathbf{x})\ dA \right) = \mathbf{0}. \tag{316}$$

Por otra parte, (311) implica

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2} \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_1} \mathbf{s}(\mathbf{e},\mathbf{x})\ dA = \mathbf{s}(\mathbf{e},\mathbf{x}_0) \tag{317}$$

y

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2} \int_{(\partial\mathcal{R}_\delta)_2} \mathbf{s}(-\mathbf{e},\mathbf{x})\ dA = \mathbf{s}(-\mathbf{e},\mathbf{x}_0). \tag{318}$$

Ahora de (316), (317) y (318) se deduce $\mathbf{s}(\mathbf{e},\mathbf{x}_0) = -\mathbf{s}(-\mathbf{e},\mathbf{x}_0)$, como queríamos demostrar. ∎

8. *Cambiamos enunciado.* **(Teorema de Da Silva)** Probar el *teorema de Da Silva*: en un instante dado el momento total sobre un cuerpo acotado $\mathcal{B}$ puede hacerse cero sometiendo las fuerzas superficiales y volúmicas a una rotación adecuada; es decir, existe una rotación $\mathbf{R}$ tal que

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{R}\mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{R}\mathbf{b}\ dV = \mathbf{0}.$$

Probar también que

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{R}^T\mathbf{r}) \times \mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA + \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{R}^T\mathbf{r}) \times \mathbf{b}\ dV = \mathbf{0}.$$

¿Cuál es el significado de esta última identidad?

Solución. Recordemos que $\mathbf{d}\times\mathbf{f}$ es el vector axial del tensor $\mathbf{f}\otimes\mathbf{d} - \mathbf{d}\otimes\mathbf{f}$ (ver ejercicios complementarios a la sección 1). Además, haremos uso del siguiente teorema de descomposición polar (ver p. ej. [4]):

Teorema (descomposición polar) *Dado* $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}$*, existen un único tensor simétrico y semidefinido positivo* $\mathbf{U}$ *y un tensor ortogonal* $\mathbf{Q}_1$ *tales que* $\mathbf{F} = \mathbf{Q}_1\mathbf{U}$*, lo que se llama una descomposición polar de* $\mathbf{F}$ *a la derecha. Análogamente, existen un único tensor simétrico y semidefinido positivo* $\mathbf{V}$ *y un tensor ortogonal* $\mathbf{Q}_2$ *tales que* $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{Q}_2$*, lo que se llama una descomposición polar de* $\mathbf{F}$ *a la izquierda. Cuando* $\mathbf{F}$ *es invertible, estas descomposiciones son únicas y además* $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$*.*

Más precisamente, usaremos el corolario que sigue:

Corolario *Dado* $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}$*, existen un tensor simétrico* $\mathbf{U}$ *y una rotación* $\mathbf{R}_1$ *tales que* $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1\mathbf{U}$*, lo que se llama una descomposición polar de* $\mathbf{F}$ *a la derecha. Análogamente, existen un tensor simétrico* $\mathbf{V}$ *y una rotación* $\mathbf{R}_2$ *tales que* $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}_2$*, lo que se llama una descomposición polar de* $\mathbf{F}$ *a la izquierda. Cuando* $\mathbf{F}$ *es invertible, estas descomposiciones son únicas,* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{V}$ *son definidas (positivas si* $\det \mathbf{F} > 0$*, negativas si* $\det \mathbf{F} < 0$*), y además* $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{U}$, con $\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}$ y $\mathbf{U}$ simétrico y semidefinido positivo, una descomposición polar a la derecha dada por el teorema anterior. Entonces, como $(\det \mathbf{Q})^2 = 1$,

$$\mathbf{F} = ((\det \mathbf{Q})\mathbf{Q})((\det \mathbf{Q})\mathbf{U}) \tag{319}$$

es una descomposión con $(\det \mathbf{Q})\mathbf{Q} \in \mathrm{Orth}^+$ y $(\det \mathbf{Q})\mathbf{U} \in \mathrm{Sym}$.
El caso de la descomposición polar a la izquierda se resuelve de forma análoga. □

Probamos ahora el teorema de Da Silva. Definamos, para $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes (\mathbf{F}\mathbf{s}(\mathbf{n}))\, dA + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes (\mathbf{F}\mathbf{b})\, dV. \tag{320}$$

Puesto que $\mathbf{d} \otimes (\mathbf{S}\mathbf{f}) = (\mathbf{d} \otimes \mathbf{f})\mathbf{S}^T$ para todo par de vectores $\mathbf{d}$ y $\mathbf{f}$ y para todo tensor $\mathbf{S}$ (ver ejercicio 1.6),

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{I})\mathbf{F}^T \quad \text{para todo } \mathbf{F} \in \mathrm{Lin}. \tag{321}$$

Sea $\mathbf{G}(\mathbf{I}) = \mathbf{V}\mathbf{R}$, con $\mathbf{V} \in \mathrm{Sym}$ y $\mathbf{R} \in \mathrm{Orth}^+$, una descomposición polar a la izquierda de $\mathbf{G}(\mathbf{I})$. Veremos que

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{R}\mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{R}\mathbf{b}\, dV = \mathbf{0}. \tag{322}$$

Notemos en primer lugar que, por (321), $\mathbf{G}(\mathbf{R}) = \mathbf{G}(\mathbf{I})\mathbf{R}^T = \mathbf{V} \in \mathrm{Sym}$. Entonces, si $\mathbf{u}$ es un vector cualquiera,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{R}\mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{R}\mathbf{b}\, dV\right) \times \mathbf{u} = \\ \left[(\mathbf{G}(\mathbf{R}))^T - \mathbf{G}(\mathbf{R})\right] \mathbf{u} = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{323}$$

lo que prueba (322).
Para probar que

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{R}^T\mathbf{r}) \times \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA + \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{R}^T\mathbf{r}) \times \mathbf{b}\, dV = \mathbf{0} \tag{324}$$

se procede de modo análogo, teniendo en cuenta que $\mathbf{R}^T\mathbf{G}(\mathbf{I}) = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R} \in \mathrm{Sym}$. La identidad (324) significa que es posible someter el cuerpo a una rotación tal que el momento total ejercido por las cargas superficiales y volúmicas se anula. ■

Nota *Acerca del ejercicio 8, el lector puede consultar también [7, sec. 7.3]. Para ver que el movimiento provocado por una rotación en $\mathbb{R}^3$ es un giro en torno a un eje puede consultarse [3, cap. 8].*

9. Supongamos que en un instante t la tracción superficial se anula en la frontera $\partial\mathcal{B}_t$. Probar que, en cualquier punto $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_t$, el vector de tensiones (la densidad superficial de fuerza por unidad de área) sobre cualquier plano perpendicular a $\partial\mathcal{B}_t$ es tangente a la frontera.

Solución. Sea $\mathbf{n}$ la normal exterior unitaria en $\partial\mathcal{B}_t$. Sabemos que

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} = \mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \forall\ \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_t. \tag{325}$$

Sea ahora $\mathbf{k}$ un vector unitario tangente a $\partial\mathcal{B}_t$ en $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_t$. Tenemos que demostrar que $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{k}$ es tangente a $\partial\mathcal{B}_t$ o, equivalentemente, que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{k} = 0$, lo que se cumple en virtud de (325) y de la simetría de $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{k} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{326}$$

■

15. CONSECUENCIAS DE LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

1. Consideremos una situación estática en la cual un cuerpo acotado ocupa la región $\mathcal{B}_0$ en todo instante. Sean $\mathbf{b} : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{V}$ y $\mathbf{T} : \mathcal{B}_0 \to \mathrm{Sym}$, con $\mathbf{T}$ regular, tales que

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Definamos el *tensor de tensiones medio* $\overline{\mathbf{T}}$ mediante la igualdad

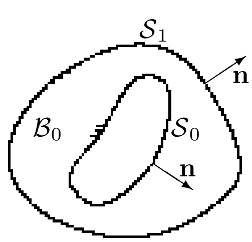
$$\operatorname{vol}(\mathcal{B}_0)\overline{\mathbf{T}} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{T}\, dV.$$

Se pide:

a) **(Teorema de Signorini)** Probar el *teorema de Signorini*: $\overline{\mathbf{T}}$ está completamente determinado por la tracción superficial $\mathbf{Tn}$ y las fuerzas volúmicas $\mathbf{b}$ del modo siguiente:

$$\operatorname{vol}(\mathcal{B}_0)\overline{\mathbf{T}} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{Tn} \otimes \mathbf{r})\, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b} \otimes \mathbf{r}\, dV.$$

b)



Supongamos que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y que $\partial\mathcal{B}_0$ consiste en dos superficies cerradas $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$, con $\mathcal{S}_1$ rodeando a $\mathcal{S}_0$, como se muestra en la figura. Supongamos además que sobre $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$ actúan presiones uniformes π_0 y π_1; es decir: $\mathbf{s}(\mathbf{n}) = -\pi_0\mathbf{n}$ en $\mathcal{S}_0$ y $\mathbf{s}(\mathbf{n}) = -\pi_1\mathbf{n}$ en $\mathcal{S}_1$, con π_0 y π_1 constantes.

Demuéstrese que $\overline{\mathbf{T}}$ es una presión de magnitud

$$\frac{\pi_1 v_1 - \pi_0 v_0}{v_1 - v_0},$$

donde v_0 y v_1 son, respectivamente, los volúmenes encerrados por $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$.

Solución. Recordemos las identidades (ver ejercicio 5.1)

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}\ dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla\mathbf{v}\ dV, \tag{327}$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{S}\mathbf{n}) \otimes \mathbf{v}\ dA = \int_{\mathcal{R}} [(\operatorname{div}\mathbf{S}) \otimes \mathbf{v} + \mathbf{S}(\nabla\mathbf{v})^T]\ dV. \tag{328}$$

a) Usando (328) y teniendo en cuenta que $\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{T}\mathbf{n} \otimes \mathbf{r})\ dA + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b} \otimes \mathbf{r}\ dV &= \\
\int_{\mathcal{B}_0} [(\operatorname{div}\mathbf{T}) \otimes \mathbf{r} + \mathbf{T}]\ dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b} \otimes \mathbf{r}\ dV &= \\
\int_{\mathcal{B}_0} (\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{r}\ dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{T}\ dV &= \\
\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{T}\ dV = \operatorname{vol}(\mathcal{B}_0)\overline{\mathbf{T}}&,
\end{aligned} \tag{329}$$

como queríamos demostrar.

b) Sea V_0 la región encerrada por $\mathcal{S}_0$ y sea V_1 la región encerrada por $\mathcal{S}_1$. Con estas notaciones, tenemos $v_0 = \operatorname{vol}(V_0)$, $v_1 = \operatorname{vol}(V_1)$, y $\operatorname{vol}(\mathcal{B}_0) = v_1 - v_0$.

Si $\mathbf{e}$ es la normal unitaria exterior a $\mathcal{B}_0$, es claro que

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \quad \text{en } \mathcal{S}_1, \tag{330}$$

$$\mathbf{e} = -\mathbf{n} \quad \text{en } \mathcal{S}_0. \tag{331}$$

Entonces, como $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, se tiene en virtud del teorema de Signorini,

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\mathcal{B}_0)\overline{\mathbf{T}} = \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\mathbf{T}\mathbf{e}) \otimes \mathbf{r}\ dA &= \\
\int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{T}\mathbf{e}) \otimes \mathbf{r}\ dA + \int_{\mathcal{S}_1} (\mathbf{T}\mathbf{e}) \otimes \mathbf{r}\ dA &= \\
-\int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \otimes \mathbf{r}\ dA + \int_{\mathcal{S}_1} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \otimes \mathbf{r}\ dA &= \\
-\int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{s}(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{r}\ dA + \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{s}(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{r}\ dA &= \\
\int_{\mathcal{S}_0} \pi_0\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}\ dA - \int_{\mathcal{S}_1} \pi_1\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}\ dA &= \\
\pi_0 \int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{n})^T\ dA - \pi_1 \int_{\mathcal{S}_1} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{n})^T\ dA&.
\end{aligned} \tag{332}$$

Y usando (327) se obtiene de (332) que

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_0)\overline{\mathbf{T}} = (\pi_0 v_0 - \pi_1 v_1)\ \mathbf{I}, \tag{333}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\overline{\mathbf{T}} = -\left(\frac{\pi_1 v_1 - \pi_0 v_0}{v_1 - v_0}\right)\mathbf{I}, \tag{334}$$

como se quería probar. ■

2. Sea $\mathcal{R}$ un volumen de control en un instante t. Demuéstrese que se cumple, en ese instante, la igualdad

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{b}\ dV = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{v}\rho\ dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times(\rho\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\ dA.$$

Solución. Puesto que $\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}}$ (ecuación del movimiento) , se tiene

$$\underbrace{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\ \operatorname{div}\mathbf{T}\ dV}_{\mathbf{I}_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{b}\ dV}_{\mathbf{I}_2} = \underbrace{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\rho\dot{\mathbf{v}}\ dV}_{\mathbf{I}_3}. \tag{335}$$

El ejercicio está resuelto si demostramos

$$\mathbf{I}_1 = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA, \tag{336}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{v}\rho\ dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times(\rho\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\ dA. \tag{337}$$

Para probar (336), veremos que, para todo $\mathbf{u}\in\mathcal{V}$,

$$\mathbf{I}_1\times\mathbf{u} = \left(\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA\right)\times\mathbf{u}, \tag{338}$$

usando para ello el hecho de que $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es el vector axial del tensor antisimétrico $\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$. (También puede probarse (336) usando coordenadas.) En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1\times\mathbf{u} &= \int_{\mathcal{R}} (\operatorname{div}\mathbf{T}\otimes\mathbf{r})\mathbf{u}\ dV - \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{r}\otimes\ \operatorname{div}\mathbf{T})\mathbf{u}\ dV = \\ &\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{T}\ dV - \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{u}\cdot\ \operatorname{div}\mathbf{T})\mathbf{r}\ dV \overset{(*)}{=} \\ &\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})\mathbf{T}]\ dV - \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}[\mathbf{r}\otimes\mathbf{T}\mathbf{u}]\ dV = \\ &\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})\mathbf{T}\mathbf{n}\ dA - \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{r}\ dA,\end{aligned} \tag{339}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{s}(\mathbf{n})\ dA\right)\times\mathbf{u} = \left(\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times(\mathbf{T}\mathbf{n})\ dA\right)\times\mathbf{u} &= \\
\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{T}\mathbf{n}\otimes\mathbf{r})\mathbf{u}\ dA - \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{r}\otimes\mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{u}\ dA &= \\
\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})\mathbf{T}\mathbf{n}\ dA - \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{T}\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{r}\ dA &\overset{(*)}{=} \\
\int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{u})\mathbf{T}\mathbf{n}\ dA - \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{r}\ dA&. \qquad (340)
\end{aligned}$$

(En las igualdades marcadas con $(*)$ se ha usado la simetría de $\mathbf{T}$.)

Para probar (337), notemos que de la igualdad (ver [2, p. 109])

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = (\rho\mathbf{v})' + \operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\rho\mathbf{v}) \qquad (341)$$

y del hecho de que $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ se deduce

$$\mathbf{I}_3 = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\mathbf{v}\rho\ dV + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\ \operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\rho\mathbf{v})\ dV, \qquad (342)$$

y por último se demuestra que

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\times\ \operatorname{div}(\mathbf{v}\otimes\rho\mathbf{v})\ dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r}\times(\rho\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\ dA, \qquad (343)$$

razonando como en la prueba de (336). ■

3. Probar la siguiente versión del teorema de la potencia consumida para un volumen de control $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{s}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\ dA + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\ dV &= \\
\int_{\mathcal{R}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\ dV + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho\ dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\ dA&.
\end{aligned}$$

Solución. Recordemos que $\mathbf{D}$ (el estiramiento) es la parte simétrica de $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$. Como $\mathbf{T}\in\mathrm{Sym}$, se cumple (ver ejercicio 1.10) $\mathbf{T}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}$. Recordemos también la ecuación del movimiento

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}}. \qquad (344)$$

De la igualdad

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{s}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\ dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{T}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\ dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{T}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\ dA &= \\
\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v})\ dV = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{T}\cdot\mathbf{L} + \mathbf{v}\cdot\ \operatorname{div}\mathbf{T})\ dV &= \\
\int_{\mathcal{R}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\ dV + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v}\cdot(\rho\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b})\ dV& \qquad (345)
\end{aligned}$$

se deduce

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{s}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\; dA + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\; dV = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\; dV + \int_{\mathcal{R}} \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\; dV. \tag{346}$$

Ahora veremos que

$$\int_{\mathcal{R}} \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\; dV = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho\; dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\; dA, \tag{347}$$

lo que completa la demostración.

Para probar (347) notemos en primer lugar que

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\; dA = \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\; dV + \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}\; dV - \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'\; dV, \tag{348}$$

En efecto, de la identidad (ver [2, p. 73])

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + \operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + (\operatorname{rot}\mathbf{v})\times\mathbf{v} \tag{349}$$

se deduce

$$\rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) = \rho\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}} - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}', \tag{350}$$

y entonces resulta

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\; dA &= \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{v}^2}{2}(\rho\mathbf{v})\right]\; dV = \\ \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\; dV &+ \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\; dV = \\ \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\; dV &+ \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}\; dV - \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'\; dV.\end{aligned} \tag{351}$$

Por otro lado, como $\rho' + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ (teorema local de conservación de la masa o ecuación de continuidad),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho\; dV &= \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho\right)'\; dV = \\ \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v})\rho\; dV &+ \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho'\; dV = \\ \int_{\mathcal{R}} \rho\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}\; dV &- \int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\; dV.\end{aligned} \tag{352}$$

Sumando (348) y (352) se obtiene (347). ■

Capítulo VI

Leyes constitutivas. Fluidos no viscosos

16. LEYES CONSTITUTIVAS

1. Consideremos un cuerpo material $(\mathcal{B}, \rho, \mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es la clase constitutiva. En lo sucesivo nos referiremos al cuerpo material con la notación abreviada $\mathcal{B}$. Una *restricción simple* para $\mathcal{B}$ es una función

$$\gamma : \mathrm{Lin}^+ \to \mathbb{R}$$

tal que cada proceso dinámico $(\mathsf{x}, \mathbf{T}) \in \mathcal{C}$ satisface

$$\gamma(\mathbf{F}) = 0, \tag{353}$$

donde $\mathbf{F} = \nabla \mathsf{x}$. Si, para un movimiento x, se cumple (353), se dice que el movimiento es consistente con la restricción (353). Análogamente, se dice que $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathrm{Lin}^+$ es consistente con la restricción (353) si $\gamma(\mathbf{F}) = 0$.

Para estos materiales se establece normalmente el siguiente axioma de restricciones: la tensión queda determinada por el movimiento salvo por una tensión $\mathbf{N}$ que realiza un trabajo nulo, i. e. $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$, en cualquier movimiento consistente con la restricción (353). (La velocidad a la que una tensión $\mathbf{N}$ realiza trabajo viene dada por $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es el estiramiento. El producto $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$ es la potencia debida a las tensiones (“stress power”) por unidad de volumen (ver [2, p. 111]).)

Vamos a precisar esta idea. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todos los posibles estiramientos; o sea, $\mathcal{D}$ es el conjunto de todos los tensores $\mathbf{D}$ con la siguiente propiedad: para alguna función $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathrm{Lin}^+$ de clase C^2 consistente con (353), $\mathbf{D}$ es la parte simétrica de $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{F}(t))^{-1}$ para algún tiempo fijo t. Sea $\mathcal{R}$ el ortogonal de $\mathcal{D}$ en Sym, es decir,

$$\mathcal{R} = \mathcal{D}^{\perp} = \{\mathbf{N} \in \mathrm{Sym} : \ \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0 \text{ para todo } \mathbf{D} \in \mathcal{D}\}.$$

Entonces el *axioma de restricciones* puede enunciarse de la siguiente manera: si $(\mathsf{x}, \mathbf{T}) \in \mathcal{C}$, entonces $(\mathsf{x}, \mathbf{T} + \mathbf{N}) \in \mathcal{C}$ cuando $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}$, donde $\mathcal{T}$ es la trayectoria de x. A $\mathcal{R}$ se le llama el *espacio de reacción*.

Un material incompresible puede definirse por medio de la restricción simple

$$\gamma(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1.$$

Pruébese que en este caso el correspondiente espacio de reacción es el conjunto de todos los tensores de la forma $-\pi\mathbf{I}$, con $\pi \in \mathbb{R}$; es decir, la tensión queda determinada por el movimiento salvo por un campo de presiones arbitrario. Probar también que las leyes o hipótesis constitutivas de un fluido ideal son consistentes con el axioma de restricciones.

SOLUCIÓN. Tenemos $\gamma(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F} - 1$ para todo $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+$. Las definiciones de $\mathcal{D}$ y de $\mathcal{R}$ son

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{\mathbf{D} \in \mathrm{Sym}: \ \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \ &\text{con } \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{F}(t))^{-1} \text{ para} \\ &\text{algún } t, \ \text{siendo } \mathbf{F}: \mathbb{R} \to \mathrm{Lin}^+ \text{ de clase } \mathrm{C}^2 \text{ tal que } \gamma(\mathbf{F}) = 0\}. \end{aligned} \tag{354}$$

y

$$\mathcal{R} = \mathcal{D}^{\perp} = \{\mathbf{N} \in \mathrm{Sym}: \ \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \forall\, \mathbf{D} \in \mathcal{D}\}. \tag{355}$$

Tenemos que demostrar la igualdad

$$\mathcal{R} = \{-\pi\mathbf{I}: \ \pi \in \mathbb{R}\}. \tag{356}$$

Para probar (356) veremos en primer lugar que

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{D} \in \mathrm{Sym}: \ \operatorname{tr}\mathbf{D} = 0\}. \tag{357}$$

Si $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$, entonces $\mathbf{D}$ es la parte simétrica de $\dot{\mathbf{F}}(t_0)(\mathbf{F}(t_0))^{-1}$, siendo $\mathbf{F}$ una función de $\mathbb{R}$ en Lin^+ de clase C^2 tal que $\det(\mathbf{F}(t)) = 1$ para todo t. Entonces

$$\frac{d}{dt}[\det(\mathbf{F}(t))] = \det(\mathbf{F}(t)) \operatorname{tr}[\dot{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{F}(t))^{-1}] = 0, \tag{358}$$

de donde

$$\det(\mathbf{F}(t_0)) \operatorname{tr}\mathbf{D} = 0, \tag{359}$$

y por lo tanto $\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$. Recíprocamente, si $\mathbf{D} \in \mathrm{Sym}$ es tal que $\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$, elíjanse primero $\mathbf{L} = \mathbf{D}$ y luego $\mathbf{F}(t)$ la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{F}(t), \\ \mathbf{F}(0) = \mathbf{I}. \end{cases} \tag{360}$$

Es decir, $\mathbf{F}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{L}}$. Obviamente $\mathbf{F}$ es de clase C^{∞}. Para ver que $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ solamente falta demostrar que $\det \mathbf{F}(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual se sigue de la igualdad $\det \mathbf{F}(t) = \mathrm{e}^{t(\operatorname{tr}\mathbf{L})}$ (ver p. ej. [9]), ya que $\operatorname{tr}\mathbf{L} = 0$. Esto completa la prueba de (357).

Ahora podemos demostrar (356). Sea $\mathbf{N} \in \mathcal{R}$; es decir, $\mathbf{N} \in \mathrm{Sym}$ tal que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{D} = 0$ para todo $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$. Veremos que $\mathbf{N} = -\pi\mathbf{I}$, con $\pi = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{N}$. Para ello nótese que $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} + \pi\mathbf{I} \in \mathcal{D}$ en virtud de (357), con lo cual $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_0 = 0$ y

$$|\mathbf{N}_0|^2 = \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_0 + \pi \operatorname{tr}\mathbf{N}_0 = 0. \tag{361}$$

Entonces $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ o, equivalentemente, $\mathbf{N} = -\pi\mathbf{I}$. Recíprocamente, si $\mathbf{N} = -\pi\mathbf{I}$ con $\pi \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbf{N} \in \mathcal{R}$, ya que $\mathbf{N} \in \mathrm{Sym}$ y $\mathbf{N}\cdot\mathbf{D} = -\pi\mathbf{I}\cdot\mathbf{D} = -\pi\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0$ si $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$, en virtud de (357). Esto completa la prueba de (356).

Por último vamos a ver que las leyes constitutivas de un fluido ideal son consistentes con el axioma de restricciones. Para un fluido ideal la clase constitutiva $\mathcal{C}$ es el conjunto de todos los procesos dinámicos isocóricos y eulerianos . Sea $(\mathsf{x}, -\pi\mathbf{I}) \in \mathcal{C}$, y sea $\mathbf{N}$ tal que $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}$ para todo $(\mathbf{x}, t)$ en la trayectoria de x. Tenemos que demostrar que $(\mathsf{x}, -\pi\mathbf{I} + \mathbf{N}) \in \mathcal{C}$. Es evidente que $(\mathsf{x}, -\pi\mathbf{I}+\mathbf{N})$ es isocórico, porque en esto interviene solamente el movimiento x; también es euleriano, porque al ser el fluido ideal un material incompresible, se tiene por (356) que $\mathbf{N} = -\tilde{\pi}\mathbf{I}$, y por lo tanto $-\pi\mathbf{I} + \mathbf{N} = -(\pi + \tilde{\pi})\mathbf{I}$. ■

17. FLUIDOS IDEALES

1. Probar que en el flujo de un fluido ideal la potencia debida a las tensiones ("stress power") es cero.

Solución. Probaremos que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} = 0$, donde $\mathbf{T}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y $\mathbf{D}$ es el estiramiento, esto es, la parte simétrica de $\mathbf{L} = \mathrm{grad}\,\mathbf{v}$.

Para un fluido ideal, $\mathbf{T} = -\pi\mathbf{I}$ y $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, con lo que

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} = -\pi\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D} = -\pi\,\mathrm{tr}\,\mathbf{L} = -\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{362}$$

■

2. Consideremos el flujo de un fluido ideal acotado sometido a una fuerza volúmica conservativa, y supongamos que, para cada t y cada $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}_t$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es tangente a $\partial\mathcal{B}_t$. Probar que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{v}^2\, dV = 0,$$

de modo que la energía cinética es constante.

Solución. Para un fluido ideal,

$$\rho = \rho_0 \text{ es constante}, \qquad \mathbf{T} = -\pi\mathbf{I}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{363}$$

Además, suponemos

$$\frac{\mathbf{b}}{\rho_0} = -\,\mathrm{grad}\,\beta \tag{364}$$

y

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_t. \tag{365}$$

Según el teorema de la potencia consumida,

$$\underbrace{\int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\, dA}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\, dV}_{I_2} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\, dV}_{I_3} + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}_t} \frac{\mathbf{v}^2}{2}\rho\, dV. \tag{366}$$

Probaremos que $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

$$I_1 = \int_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v}\, dA = -\int_{\partial\mathcal{B}_t} \pi\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\, dA = 0, \tag{367}$$

$$I_2 = -\rho_0 \int_{\mathcal{B}_t} (\operatorname{grad}\beta) \cdot \mathbf{v}\, dV = -\rho_0 \int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div}(\beta\mathbf{v})\, dV =$$

$$-\rho_0 \int_{\partial\mathcal{B}_t} \beta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dA = 0, \tag{368}$$

y por último $I_3 = 0$, en virtud del ejercicio 1. ■

3. *Cambiamos enunciado.* Probar que si x representa un movimiento de un fluido ideal sometido a la acción de fuerzas volúmicas conservativas, entonces $\ddot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ es simétrico.

   Solución. La ecuación del movimiento para un fluido ideal es

$$-\operatorname{grad}\pi + \mathbf{b} = \rho_0\dot{\mathbf{v}}. \tag{369}$$

   Si la fuerza volúmica es conservativa, se cumple

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\left(\frac{\pi}{\rho_0} + \beta\right), \tag{370}$$

   donde β es el potencial del cual deriva $\mathbf{b}/\rho_0$.

   Como $\dot{\mathbf{v}}$ es de clase C^1, se sigue de (370) que $\frac{\pi}{\rho_0} + \beta$ es de clase C^2 en $\mathbf{x}$, y por lo tanto

$$\operatorname{grad}\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\operatorname{grad}\left(\frac{\pi}{\rho_0} + \beta\right) \tag{371}$$

   es simétrico. Entonces la igualdad (ver [2, p. 63])

$$\ddot{\mathbf{F}} = (\operatorname{grad}\dot{\mathbf{v}})_m\mathbf{F} \tag{372}$$

   implica que $\ddot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ es simétrico. ■

4. Consideremos un flujo estacionario e irrotacional de un fluido ideal en torno a un obstáculo $\mathcal{R}$, como se muestra en la figura.

   Es decir, $\mathcal{R}$ es una región regular acotada cuyo interior está fuera de la región de flujo $\mathcal{B}_0$, y cuya frontera es un subconjunto de $\partial\mathcal{B}_0$. Supongamos que la fuerza volúmica $\mathbf{b}$ es cero. Probar que, en tal caso, la fuerza total que ejerce el fluido sobre $\mathcal{R}$ es igual a

$$\frac{\rho_0}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}^2\mathbf{n}\, dA.$$

   Solución. El teorema de Bernoulli para un fluido ideal en flujo estacionario e irrotacional sometido a la acción de fuerzas volúmicas conservativas (en este caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, y por lo tanto puede elegirse el potencial β igual a 0) nos dice que

$$-\pi = \frac{\rho_0}{2}\mathbf{v}^2 + K, \tag{373}$$

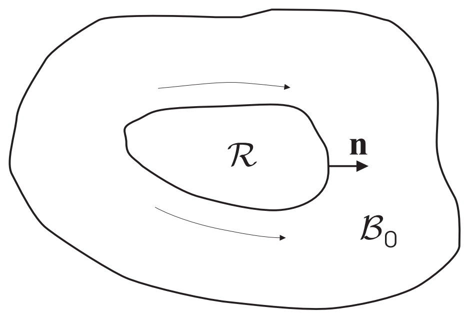


Figura VI.1: Flujo en torno al obstáculo $\mathcal{R}$.

con K constante. La fuerza total ejercida por el fluido sobre $\mathcal{R}$ es

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{s}(\mathbf{n})\, dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{Tn}\, dA = \int_{\partial\mathcal{R}} -\pi\mathbf{n}\, dA =$$
$$\int_{\partial\mathcal{R}} \left(\frac{\rho_0}{2}\mathbf{v}^2 + K\right)\mathbf{n}\, dA = \frac{\rho_0}{2}\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}^2\mathbf{n}\, dA, \tag{374}$$

ya que, por el teorema de la divergencia,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n}\, dA = \int_{\mathcal{R}} \operatorname{grad} 1\, dV = \mathbf{0}. \tag{375}$$

■

18. FLUJO ESTACIONARIO, PLANO E IRROTACIONAL DE UN FLUIDO IDEAL

1. *Cambiamos enunciado.* Demostrar que el potencial complejo

$$w(z) = -C\, \mathrm{e}^{-i\pi\beta} z^{\beta+1} \qquad (C \neq 0, \quad \beta > 0)$$

representa el flujo plano en torno a una región en forma de pico de ángulo 2α, con

$$\alpha = \frac{\beta\pi}{\beta+1}.$$

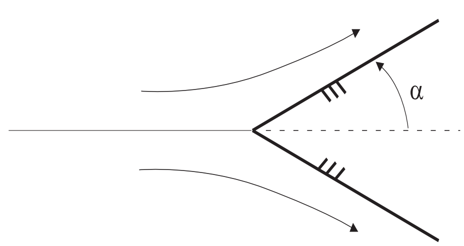


Figura VI.2: Flujo en torno a la cúspide.

Determínense, si existen, los puntos de estancamiento.

Solución. Notemos en primer lugar que $\alpha \in (0, \pi)$, porque $\beta > 0$. Entonces, en coordenadas polares (r, θ), las paredes del obstáculo son las semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = 2\pi - \alpha$.

La velocidad del fluido es tangente a las paredes del obstáculo, de modo que w representa el flujo si las paredes son líneas de corriente.

La ecuación de las líneas de corriente es

$$\psi = \text{constante}, \tag{376}$$

donde ψ es la parte imaginaria del potencial complejo w, lo que se llama la función de corriente. Para determinar la función de corriente, es cómodo expresar el potencial complejo en coordenadas polares:

$$w(r, \theta) = -C\ r^{\beta+1} \mathrm{e}^{i[-\pi\beta+\theta(\beta+1)]}, \tag{377}$$

de donde se deduce que

$$\psi(r, \theta) = -C\ r^{\beta+1} \operatorname{sen}[-\pi\beta + \theta(\beta + 1)]. \tag{378}$$

Entonces las paredes $\theta = \alpha$ y $\theta = 2\pi - \alpha$ son líneas de corriente, ya que sobre ellas ψ vale 0. También es una línea de corriente $\theta = \pi$, por la misma razón. Si $\beta \geq 1$, hay más semirrectas que parten del origen sobre las que $\psi = 0$, pero todas están dentro del obstáculo.

(Nótese que para que una semirrecta que parte del origen sea una línea de corriente, es necesario y suficiente que ψ valga 0 sobre la semirrecta.)

Los puntos de estancamiento son las soluciones de

$$g(z) = 0, \tag{379}$$

donde $g = dw/dz$ es la velocidad compleja. Puesto que

$$g(z) = -C(\beta + 1)\mathrm{e}^{-i\pi\beta} z^{\beta} \tag{380}$$

y $\beta > 0$, el único punto de estancamiento es $z = 0$.

El razonamiento que sigue prueba que si C es negativa la dirección del flujo es de izquierda a derecha, contra la cúspide, como en la figura. De (380) se concluye que la primera componente de la velocidad, expresada es coordenadas polares, es

$$v_1(r, \theta) = -C(\beta + 1)r^{\beta} \cos[\beta(\theta - \pi)], \tag{381}$$

ya que v_1 es la parte real de g. Entonces, sobre la semirrecta $\theta = \pi$,

$$v_1(r, \pi) = -C(\beta + 1)r^{\beta}, \tag{382}$$

que es positiva si $C < 0$. ■

Nota *Puede comprobarse que, si en el ejercicio 1 tomamos $\beta \in (-1, 0)$, entonces la única línea de corriente que parte del origen es $\theta = \pi$. Por otra parte, es claro que para esos valores de β no hay puntos de estancamiento.*

Si $\beta = 0$, hay dos semirrectas que parten del origen y que son líneas de corriente: $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Tampoco hay en este caso puntos de estancamiento.

2. Representar las líneas de corriente del potencial complejo

$$w(z) = Cz^2,$$

donde C es una constante real no nula, y demostrar que el módulo de la velocidad es proporcional a la distancia al origen.

SOLUCIÓN. El potencial es el caso particular $\beta = 1$ del ejercicio 1. Entonces la velocidad compleja es

$$g(z) = 2Cz \tag{383}$$

y el módulo $2|Cz|$ es proporcional a la distancia al origen $|z|$.

Las líneas de corriente se determinan con facilidad utilizando coordenadas cartesianas. La función de corriente es

$$\psi(x_1, x_2) = 2Cx_1x_2, \tag{384}$$

así que las líneas de corriente son las rectas $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, y las hipérbolas $x_1x_2 = K$, con K una constante no nula. ■

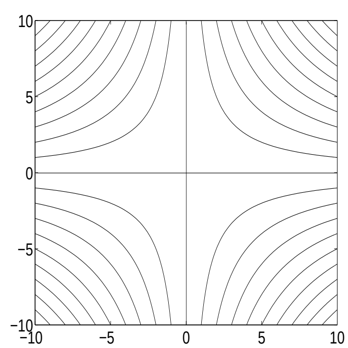


Figura VI.3: Líneas de corriente (ejercicio 2).

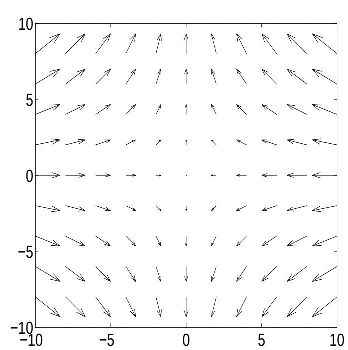


Figura VI.4: Campo de velocidades para C negativa (ejercicio 2).

3. *Cambiamos enunciado.* Consideremos un flujo plano, estacionario e irrotacional de un fluido ideal. Sea $\mathbf{c}$ *esencialmente un segmento de una línea de corriente* tal que

$$\mathbf{c}(0) = (x_A, y_A), \qquad \mathbf{c}(1) = (x_B, y_B).$$

Sea π_0 la presión en un punto en el que la velocidad es $\mathbf{v}_0$. Probar que, si no hay fuerzas volúmicas, la fuerza sobre $\mathbf{c}$ viene dada por

$$f_1(\mathbf{c}) - if_2(\mathbf{c}) = -\left(\pi_0 + \frac{\rho_0 \mathbf{v}_0^2}{2}\right)[(y_B - y_A) + i(x_B - x_A)] + \frac{i\rho_0}{2}\int_{\mathbf{c}} g^2\, dz.$$

Solución. La fuerza ejercida sobre $\mathbf{c}$ viene dada por

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}) = -\int_0^1 \pi(\mathbf{c}(\sigma))\mathbf{k}(\sigma)\, d\sigma, \tag{385}$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ y $\mathbf{k} = (\dot{c}_2, -\dot{c}_1)$ es el vector normal a $\mathbf{c}$.

En ausencia de fuerzas volúmicas, para un fluido ideal en flujo estacionario e irrotacional se tiene (teorema de Bernoulli)

$$\pi + \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} = C, \tag{386}$$

con C constante. Las identidades (385) y (386) implican

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \int_0^1 \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} - C\right)\mathbf{k}\, d\sigma = \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 \mathbf{v}^2\mathbf{k}\, d\sigma - C\int_0^1 \mathbf{k}\, d\sigma, \tag{387}$$

de donde se obtienen las igualdades

$$f_1(\mathbf{c}) = \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 \mathbf{v}^2\dot{c}_2\, d\sigma - C\int_0^1 \dot{c}_2\, d\sigma, \tag{388}$$

$$f_2(\mathbf{c}) = -\frac{\rho_0}{2}\int_0^1 \mathbf{v}^2\dot{c}_1\, d\sigma + C\int_0^1 \dot{c}_1\, d\sigma, \tag{389}$$

que a su vez implican

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{c}) - if_2(\mathbf{c}) &= \frac{\rho_0}{2}\int_0^1 \mathbf{v}^2(\dot{c}_2 + i\dot{c}_1)\, d\sigma - C\int_0^1 (\dot{c}_2 + i\dot{c}_1)\, d\sigma = \\ &\frac{i\rho_0}{2}\int_0^1 \mathbf{v}^2(\dot{c}_1 - i\dot{c}_2)\, d\sigma - C[(y_B - y_A) + i(x_B - x_A)]. \end{aligned} \tag{390}$$

Además, puesto que π_0 es la presión en un punto en el que la velocidad es $\mathbf{v}_0$, se tiene en virtud de (386) que

$$C = \pi_0 + \frac{\rho_0 \mathbf{v}_0^2}{2}, \tag{391}$$

y (390) queda

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{c}) - if_2(\mathbf{c}) = -\left(\pi_0 + \frac{\rho_0 \mathbf{v}_0^2}{2}\right)&[(y_B - y_A) + i(x_B - x_A)] + \\ &\frac{i\rho_0}{2}\int_0^1 \mathbf{v}^2(\dot{c}_1 - i\dot{c}_2)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{392}$$

Ahora solo falta comprobar que

$$\int_0^1 \mathbf{v}^2(\dot{c}_1 - i\dot{c}_2)\ d\sigma = \int_{\mathbf{c}} g^2\ dz. \tag{393}$$

Notemos que, por ser $\mathbf{c}$ esencialmente un segmento de una línea de corriente, la velocidad del fluido es tangente a $\mathbf{c}$; es decir, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ o, equivalentemente, para todo $\sigma \in [0, 1]$,

$$v_1(\mathbf{c}(\sigma))\dot{c}_2(\sigma) = v_2(\mathbf{c}(\sigma))\dot{c}_1(\sigma). \tag{394}$$

Entonces se satisface la igualdad (sencillamente, háganse las operaciones)

$$[\mathbf{v}(\mathbf{c}(\sigma))]^2(\dot{c}_1(\sigma) - i\dot{c}_2(\sigma)) = [v_1(\mathbf{c}(\sigma)) - iv_2(\mathbf{c}(\sigma))]^2(\dot{c}_1(\sigma) + i\dot{c}_2(\sigma)), \tag{395}$$

de donde

$$\int_{\mathbf{c}} g^2\ dz = \int_0^1 (v_1 - iv_2)^2(\dot{c}_1 + i\dot{c}_2)\ d\sigma = \int_0^1 \mathbf{v}^2(\dot{c}_1 - i\dot{c}_2)\ d\sigma, \tag{396}$$

lo que prueba (393). ■

19. FLUIDOS ELÁSTICOS

1. Un *gas ideal* es un fluido elástico definido por una ley constitutiva de la forma

$$\pi = \lambda\rho^\gamma, \tag{397}$$

donde $\lambda > 0$ y $\gamma > 1$ son constantes reales. (Nótese que un gas ideal *no* es un fluido ideal.) Hablando con más precisión, la ecuación (397) representa el comportamiento isentrópico de un gas ideal con calores específicos constantes. Se pide:

a) Probar que la velocidad del sonido $K = K(\rho)$ viene dada por

$$K^2 = \frac{\gamma\pi}{\rho}.$$

b) Para fluidos elásticos se cumple que, si el flujo es potencial ($\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$), estacionario e irrotacional, se puede expresar ρ, y por lo tanto $K(\rho)$, como función de $\operatorname{grad}\varphi$. En ese caso expresamos la velocidad del sonido con la notación $\hat{K} = \hat{K}(\operatorname{grad}\varphi)$. Probar que, si no hay fuerzas volúmicas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), se tiene

$$\hat{K}^2(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\gamma - 1}{2}(\upsilon^2 - |\operatorname{grad}\varphi|^2),$$

donde υ es una constante y γ viene de la ecuación (397).

Solución. Recordemos que, por definición, la velocidad del sonido es la raíz cuadrada de la derivada de la presión con respecto a la densidad.

a) Como $\pi = \lambda\rho^\gamma$ y $K^2(\rho) = d\pi/d\rho$,

$$K^2(\rho) = \lambda\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{\lambda\rho^\gamma}{\rho} = \frac{\gamma\pi}{\rho}, \tag{398}$$

como queríamos ver.

b) Si definimos

$$\varepsilon_{\rho_*}(\rho) = \int_{\rho_*}^{\rho} \frac{K^2(s)}{s}\, ds, \tag{399}$$

donde $\rho_* > 0$ es un valor arbitrario de la densidad, sabemos que (teorema de Bernoulli para fluidos elásticos)

$$\frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2} + \varepsilon_{\rho_*}(\rho) = C_{\rho_*}, \tag{400}$$

con C_{ρ_*} constante, ya que el flujo es potencial, estacionario, irrotacional, y no hay fuerzas volúmicas. Por lo tanto se tiene, despejando ρ de (400),

$$\hat{K}(\operatorname{grad}\varphi) = K\left(\varepsilon_{\rho_*}^{-1}\left(C_{\rho_*} - \frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2}\right)\right). \tag{401}$$

Elijamos $\rho_* = 1$ y llamemos ε a ε_1 y C a C_1. Como se vio en la demostración del apartado (a),

$$K^2(\rho) = \lambda\gamma\rho^{\gamma-1}, \tag{402}$$

así que, en virtud de (399),

$$\varepsilon(\rho) = \frac{\lambda\gamma}{\gamma-1}\left[\rho^{\gamma-1} - 1\right], \tag{403}$$

y por lo tanto

$$\varepsilon^{-1}(X) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{\lambda\gamma}X\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{404}$$

Las relaciones (401), (402) y (404) implican que

$$\begin{aligned}\hat{K}^2(\operatorname{grad}\varphi) = K^2\left(\left[1 + \frac{\gamma-1}{\lambda\gamma}\left(C - \frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\right) &= \\ \lambda\gamma\left[1 + \frac{\gamma-1}{\lambda\gamma}\left(C - \frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2}\right)\right] &= \\ (\gamma-1)\left[\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1} + C - \frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2}\right]&.\end{aligned} \tag{405}$$

Notemos que ahora el ejercicio está resuelto si probamos que

$$\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1} + C > 0, \tag{406}$$

ya que en ese caso podemos elegir una constante υ tal que

$$\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1} + C = \frac{\upsilon^2}{2}. \tag{407}$$

Usando (400) y (403), resulta

$$\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1}+C=\frac{|\operatorname{grad}\varphi|^2}{2}+\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}>0, \tag{408}$$

como queríamos probar. ■

2. Consideremos el gas ideal (397) en equilibrio ($\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{0}$) sometido a la acción de la fuerza de la gravedad

$$\mathbf{b}=-\rho g\mathbf{e}_3,$$

donde g es la constante de la gravedad. Supongamos que

$$\pi(\mathbf{x})=\pi_0=\text{constante} \qquad \text{en los } \mathbf{x} \text{ con } x_3=0.$$

Determínese la distribución de la presión en función de la altura x_3.

Solución. La ecuación del movimiento es

$$-\operatorname{grad}\pi+\mathbf{b}=\rho\dot{\mathbf{v}}. \tag{409}$$

Si $\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{b}=-\rho g\mathbf{e}_3$ tenemos

$$-\operatorname{grad}\pi-\rho g\mathbf{e}_3=\mathbf{0}, \tag{410}$$

es decir,

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_1}=0, \tag{411}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_2}=0, \tag{412}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_3}+\rho g=0. \tag{413}$$

De (411) y (412) deducimos que $\pi(x_1,x_2,x_3)=\pi(x_3)$. Entonces, como

$$\rho=\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{414}$$

en virtud de (397), resulta que $\pi(x_3)$ es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi}{dx_3}=-\left(\dfrac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\gamma}}g, \\ \\ \pi(0)=\pi_0. \end{cases} \tag{415}$$

Resolviendo (415) se obtiene

$$\pi(x_3)=\left[\pi_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-\frac{\gamma-1}{\gamma\lambda^{\frac{1}{\gamma}}}gx_3\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{416}$$

Inmediatamente, se observa en (416) que la presión aumenta con la profundidad. ■

3. Probar que para un fluido elástico la potencia debida a las tensiones ("stress power") de una parte $\mathcal{P}$ en el instante t es

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\, dV = -\int_{\mathcal{P}_t} \pi \dot{\upsilon} \rho\, dV,$$

donde

$$\upsilon = \frac{1}{\rho}$$

es el volumen específico (i. e., el volumen por unidad de masa).

Solución. El resultado es cierto para cualquier fluido euleriano; es decir, para cualquier fluido cuyo tensor de tensiones sea $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}$. En efecto, en ese caso,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = -\pi \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} = -\pi \operatorname{tr} \mathbf{D} = -\pi \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{417}$$

ya que $\mathbf{D}$ es la parte simétrica de $\mathbf{L} = \operatorname{grad} \mathbf{v}$ y por lo tanto $\operatorname{tr} \mathbf{D} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{v}$.

De (417) y de la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{418}$$

se deduce que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \pi \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \tag{419}$$

Por otro lado

$$-\pi \dot{\upsilon} \rho = -\pi \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\bullet} \rho = \pi \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \tag{420}$$

Claramente, (419) y (420) implican

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\, dV = -\int_{\mathcal{P}_t} \pi \dot{\upsilon} \rho\, dV, \tag{421}$$

como queríamos demostrar. ∎

Bibliografía

[1] D. S. Chandrasekharaiah, Lokenath Debnath (1994) *Continuum Mechanics*. Boston (Massachusetts). Academic Press.

[2] Morton E. Gurtin (1981) *An Introduction to Continuum Mechanics*. New York. Academic Press.

[3] Eugenio Hernández Rodríguez (1994) *Álgebra y geometría*. Wilmington (Delaware). Addison–Wesley Iberoamericana.

[4] Roger A. Horn, Charles R. Johnson (1991) *Matrix Analysis*. Cambridge (UK). Cambridge University Press.

[5] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya, Vsevolod Alekseevich Solonnikov, *On some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary value problems for the Navier–Stokes equations*, Zapiski Nauchn. Sem. LOMI **59** (1976), 81–116 (en ruso). Traducción inglesa: J. Sov. Math. **10**, no. 2 (1978), 257–285.

[6] Gary M. Lieberman, *Nonuniqueness for some linear oblique derivative problems for elliptic equations*, Comment. Math. Univ. Carolinae **40**, no. 3 (1999), 477–481.

[7] Jerrold Eldon Marsden, Thomas J. R. Hughes (1983) *Mathematical Foundations of Elasticity*. Englewood Cliffs (New Jersey). Prentice–Hall.

[8] Nikolai S. Nadirashvili, *On the question of the uniqueness of the solution of the second boundary value problem for second order elliptic equations*, Mat. Sb. (N. S.) **122(164)**, no. 3 (1983), 341–359. English translation: Math. USSR–Sb. **50**, no. 2 (1985), 325–341.

[9] Sylvia Novo Martín, Rafael Obaya García, Jesús Rojo García (1995) *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*. Madrid. McGraw–Hill/Interamericana de España, S. A.

[10] Konstantin Pileckas, *Three–dimensional solenoidal vectors*, Zapiski Nauchn. Sem. LOMI **96** (1980), 237–239 (en ruso). Traducción inglesa: J. Sov. Math. **21** (1983), 821–823.

[11] Konstantin Pileckas, *On spaces of solenoidal vectors*, Trudy Mat. Inst. Steklov **159** (1983), 137–149 (en ruso). Traducción inglesa: Proc. Math. Inst. Steklov **159**, no. 2 (1984), 141–154.

[12] KONSTANTIN PILECKAS, *Recent advances in the theory of Stokes and Navier–Stokes equations in domains with non–compact boundaries*, pp. 30–85 de G. P. Galdi, J. Málek, J. Nečas (editors) (1996), *Mathematical Theory in Fluid Mechanics*. Harlow (UK). Addison Wesley Longman Limited.

[13] JAMES G. SIMMONDS (1982) *A Brief on Tensor Analysis*. New York. Springer.

[14] HANS ZIEGLER (1977) *An Introduction to Thermomechanics*. Amsterdam. North–Holand.

Índice alfabético