

LVI Olimpiáda Matemática Española

Fase Galega

Primeira sesión

Venres mañá, 17 de xaneiro de 2020

1. Dado un número natural $n > 1$, realizamos a seguinte operación: se n é par, dividímolos entre dous; se n é impar, sumámoslle 5. Se o número obtido tras esta operación é 1, paramos o proceso; en caso contrario, volvemos aplicar a mesma operación, e así sucesivamente. Determinar todos os valores de n para os que este proceso é finito, é dicir, chegamos a 1 nalgún momento.
2. Sexan $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ 2020 números reais de maneira que a suma de 1009 deles calquera é positiva. Demostrar que a suma dos 2020 números tamén é positiva.
3. Determinar todos os valores reais de (x, y, z) para os que

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x^2y + y^2z + z^2x &= xy^2 + yz^2 + zx^2 \\x^3 + y^2 + z &= y^3 + z^2 + x\end{aligned}$$

Non está permitido o uso de calculadoras.

Transcorrida 1 hora e media, hai que entregar un problema.

A continuación, cada hora entregárase un novo problema.

LVI Olimpiáda Matemática Española

Fase Galega

Segunda sesión

Venres tarde, 17 de xaneiro de 2020

4. Dados a , b e c tres números reais, consideramos o polinomio

$$p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo número real x se, e só se, $a = b = c$.

5. Sexa ABC un triángulo con $AB < AC$ e sexa I o seu incentro. O incírculo é tanxente ó lado BC no punto D . Sexa E o único punto que satisfai que D é o punto medio do segmento BE . A recta perpendicular a BC que pasa por E corta a CI no punto P . Demostrar que BP é perpendicular a AD .

Observación. O incírculo de ABC é o círculo que é tanxente ós tres lados do triángulo. O incentro é o centro de dito círculo.

6. Sexa n un número enteiro positivo. Nuna cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunhas casañas teñen un espello de dobre cara ó longo dunha das súas diagonais. No exterior de cada casaña dos lados esquerdo e dereito da cuadrícula hai un punteiro láser, que apunta horizontalmente cara ó centro da cuadrícula. Os láseres enuméranse, de arriba abaixo, de 1 a n en cada lado. Un láser é vermello cando sae da cuadrícula polo borde superior e é azul se sae da cuadrícula polo borde inferior. Se cada láser sae ou ben polo borde inferior ou polo superior, demostrar que a suma dos números que corresponden ós láseres vermellos é menor ou igual ca suma dos que corresponden ós láseres azuis.

Non está permitido o uso de calculadoras.

Transcorrida 1 hora e media, hai que entregar un problema.

A continuación, cada hora entregárase un novo problema.