Notas para un curso de Álgebra Lineal

M. Purificación López López   Nieves Rodríguez González

Santiago de Compostela, 2015-21

Índice general

Capítulo 1

Álgebra matricial

1.1. Matrices

A partir de ahora K denotará un cuerpo.

Definición 1.1. Una *matriz* $A = (a_{ij})$ *de orden* $m \times n$ sobre un cuerpo K es una tabla de doble entrada con mn elementos del cuerpo K, dispuestos en m filas y n columnas. Al elemento que ocupa la fila i y la columna j de la matriz A lo denotaremos por a_{ij} o por $A(i,j)$. Así pues:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son *iguales* si tienen el mismo orden y para cada par de índices i y j se tiene que $a_{ij} = b_{ij}$.

Al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ sobre un cuerpo K se le denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Si $m = n$, se denota por $\mathcal{M}_n(K)$.

- Si $A \in \mathcal{M}_{1\times n}(K)$ se dice que A es una *matriz fila*.
- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$ se dice que A es una *matriz columna*.
- A las matrices de orden $n \times n$ se les llama *matrices cuadradas de orden* n.

Denotaremos por I_n la matriz diagonal de orden n, (δ_{ij}), con $\delta_{ii} = 1$ para $i = 1, \dots, n$ y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. A esta matriz se le llamará *matriz identidad* n*-ésima* o *matriz identidad de orden* n.

1.2. Operaciones con matrices

Definición 1.2. Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se define la *suma* de A y B como una matriz $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ de modo que $(A + B)(i,j) = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall i, j$, es decir:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.3. Sean $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y α un escalar en K. Se define la *multiplicación de un escalar α por una matriz A* como una matriz $\alpha A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ de modo que $(\alpha A)(i,j)=\alpha a_{ij}\ \forall i,j$, es decir:

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.4. *Sean A, $B\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y α, $\beta\in K$. Se verifican las propiedades siguientes:*

1. $(\mathcal{M}_{m\times n}(K),+)$ *es un grupo abeliano.*

2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

4. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

5. $1_K A=A$.

El elemento neutro del grupo $(\mathcal{M}_{m\times n}(K),+)$ es la matriz con todas sus entradas 0 y la denotaremos por (0).

Definición 1.5. Sean $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times s}(K)$ se define el *producto* de A por B como una matriz AB en $\mathcal{M}_{m\times s}(K)$ en donde:

$$(AB)(i,j)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ \text{para } i=1,\dots,m \text{ y } j=1,\dots,s.$$

Observaciones 1.6.

1. Nótese que, para hacer el producto AB es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

2. En general, el producto de matrices no es conmutativo. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.7. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Asociativa:* $(AB)C = A(BC)$, *donde* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K), B \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$ *y* $C \in \mathcal{M}_{s\times r}(K)$.

2. *Distributiva por la izquierda del producto respecto de la suma:* $A\,(B + C) = AB+AC$, *donde* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $B,\ C \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$.

3. *Distributiva por la derecha del producto respecto de la suma:* $(B+C)A = BA+CA$, *donde* $A \in \mathcal{M}_{s\times r}(K)$ *y* $B,\ C \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$.

4. $AI_n = A = I_m A$, *donde* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

5. $(\mathcal{M}_n(K), +, .)$ *es un anillo.*

6. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, *donde* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$ *y* $\alpha \in K$.

Definición 1.8. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, se dice que A es *no singular* o que A es *invertible* si A tiene inversa para el producto, es decir si existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que $AB = I_n = BA$. La matriz B se llama *inversa de* A y se denota por A^{-1}. Si A no tiene inversa, se dice que A es singular.

Nótese que, si existe, la inversa de A es única.

Definición 1.9. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Llamaremos *matriz traspuesta de* A a la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ tal que $(A^t)(i, j) = A(j, i) = a_{ji}$, para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$.

Ejemplo 1.10.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposición 1.11. *Se verifican las propiedades siguientes:*

1. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *es no singular, entonces* A^{-1} *es no singular y* $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. *Si* $A,\ B \in \mathcal{M}_n(K)$ *son matrices no singulares, entonces* AB *es no singular y* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $(A^t)^t = A$, *siendo* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

4. $(A + B)^t = A^t + B^t$, *siendo* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

5. $(AB)^t = B^t A^t$, *siendo* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $B \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$.

6. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *es una matriz no singular,* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demostración. Las propiedades 1, 3 y 4 son evidentes.

Para demostrar 2, basta tener en cuenta que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB).$$

Para demostrar 5, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$, se tiene

$$\begin{aligned}(AB)^t(i,j) = (AB)(j,i) &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(B^t)(i,k)(A^t)(k,j) = (B^tA^t)(i,j).\end{aligned}$$

La prueba de 6 es análoga a la de 2, utilizando 3. □

Observaciones 1.12.

1. Si $A = (a_{11}\, a_{12}\, \dots\, a_{1n}) \in \mathcal{M}_{1\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$, entonces

$$\begin{aligned}&(a_{11}\, a_{12}\, \dots\, a_{1n})\, B \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}\ \dots\ a_{11}b_{1s} + a_{12}b_{2s} + \cdots + a_{1n}b_{ns}) \\ &= a_{11}(b_{11}\, b_{12}\, \dots\, b_{1s}) + \cdots + a_{1n}(b_{n1}\, b_{n2}\, \dots\, b_{ns}) \\ &= a_{11}F_1(B) + \cdots + a_{1n}F_n(B),\end{aligned}$$

en donde $F_i(B)$ denota la matriz fila correspondiente a la fila i-ésima de B.

2. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$, como consecuencia de la observación anterior, se tiene que la fila i-ésima de la matriz AB es de la forma:

$$F_i(AB) = a_{i1}F_1(B) + \cdots + a_{in}F_n(B).$$

3. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \cdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix} b_{11} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix} b_{n1} = b_{11}C_1(A) + \cdots + b_{n1}C_n(A),$$

en donde $C_j(A)$ denota la matriz columna correspondiente a la columna j-ésima de A.

Esta propiedad también se deduce directamente del apartado 1 de la observación 1.12, utilizando que $(AB)^t = B^t A^t$.

4. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times s}(K)$, la columna j-ésima de la matriz AB es de la forma:

$$C_j(AB) = b_{1j}C_1(A) + \cdots + b_{nj}C_n(A).$$

Ejemplo 1.13.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & -3 \\ 4 & -1 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Nótese que, como hemos visto en 2 y 3 de las observaciones 1.12, se tiene que:

$$(7,-1) = 1(1,-1) + 2(3,0) + 0(1,2),$$
$$(6,-3) = 1(1,-1) + 2(3,0) + (-1)(1,2),$$
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y lo análogo para las restantes filas y columnas.

1.3. Matrices elementales

Definición 1.14. Llamaremos matriz *elemental* de orden m a cualquiera de las siguientes matrices:

1. La obtenida de I_m intercambiando la fila i con la j, que denotamos por $E_{F_i\leftrightarrow F_j}$.

$E_{F_i\leftrightarrow F_j}(i,j) = E_{F_i\leftrightarrow F_j}(j,i) = E_{F_i\leftrightarrow F_j}(k,k) = 1$ si $k \neq i,j$ y las demás entradas son cero.

$$I_m \xrightarrow[F_i\leftrightarrow F_j]{} E_{F_i\leftrightarrow F_j}.$$

2. La obtenida de I_m multiplicando la fila i por $\alpha \in K$ y $\alpha \neq 0$, que denotamos por $E_{\alpha F_i}$.

$E_{\alpha F_i}(k,k) = 1$ si $k \neq i$, $E_{\alpha F_i}(i,i) = \alpha$ y las demás entradas son cero.

$$I_m \xrightarrow[\alpha F_i]{} E_{\alpha F_i} \quad \text{con } \alpha \in K \text{ y } \alpha \neq 0.$$

3. La obtenida de I_m sumándole a la fila i la fila j multiplicada por $\alpha \in K$, siendo $i \neq j$, que denotaremos por $E_{F_i+\alpha F_j}$.

$E_{F_i+\alpha F_j}(k,k) = 1 \ \forall k$, $E_{F_i+\alpha F_j}(i,j) = \alpha$ y las demás entradas son cero.

$$I_m \xrightarrow[F_i+\alpha F_j]{} E_{F_i+\alpha F_j}.$$

Proposición 1.15. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces:*

1. $E_{F_i \leftrightarrow F_j}A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *es la matriz obtenida de A al intercambiar su fila i-ésima con la j-ésima.*

2. $E_{\alpha F_i}A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *es la matriz obtenida de A al multiplicar su fila i-ésima por un escalar $\alpha \neq 0$.*

3. $E_{F_i+\alpha F_j}A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *es la matriz obtenida de A sumándole a su fila i-ésima la j-ésima multiplicada por $\alpha \in K$, para $i \neq j$.*

Demostración. Para hacer la demostración utilizaremos la observación 1.12.

1. $F_i(E_{F_i\leftrightarrow F_j}A) = 0F_1(A) + \cdots + \underbrace{1F_j(A)}_{j} + \cdots + 0F_n(A) = F_j(A)$,

$F_j(E_{F_i\leftrightarrow F_j}A) = 0F_1(A) + \cdots + \underbrace{1F_i(A)}_{i} + \cdots + 0F_n(A) = F_i(A)$ y

$F_k(E_{F_i\leftrightarrow F_j}A) = F_k(A)$, si $k \neq i, j$.

2. $F_i(E_{\alpha F_i}A) = 0F_1(A) + \cdots + \underbrace{\alpha F_i(A)}_{i} + \cdots + 0F_n(A) = \alpha F_i(A)$ y

$F_k(E_{\alpha F_i}A) = F_k(A)$, si $k \neq i$.

3. $F_i(E_{F_i+\alpha F_j}A) = 0F_1(A) + \cdots + \underbrace{1F_i(A)}_{i} + \cdots + \underbrace{\alpha F_j(A)}_{j} + \cdots + 0F_n(A)$

$= F_i(A) + \alpha F_j(A)$ y, si $k \neq i$, entonces $F_k(E_{F_i+\alpha F_j}A) = F_k(A)$. □

Como consecuencia inmediata de esta proposición se tiene:

Corolario 1.16. *Toda matriz elemental es invertible y su inversa también es una matriz elemental. Concretamente,*

$$(E_{F_i\leftrightarrow F_j})^{-1} = E_{F_i\leftrightarrow F_j},\ (E_{\alpha F_i})^{-1} = E_{\alpha^{-1}F_i} \ \text{y}\ (E_{F_i+\alpha F_j})^{-1} = E_{F_i-\alpha F_j}.$$

Definición 1.17. Dos matrices A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son *equivalentes por filas* si existen matrices elementales $E_1, \dots, E_s$ tales que $B = E_s \cdots E_1 A$.

Es evidente que "ser equivalentes por filas" es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Nótese que si A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son equivalentes por filas, significa que de una se obtiene la otra tras una sucesión finita de operaciones de los siguientes tipos:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por un escalar no nulo.
3. Sumarle a una fila un múltiplo escalar de otra.

Estas operaciones se llaman *operaciones elementales por filas.*

Proposición 1.18. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ son matrices equivalentes por filas, entonces*

$$A \text{ es invertible si, y solo si, } B \text{ es invertible.}$$

Observaciones 1.19. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces:

1. $AE_{F_i\leftrightarrow F_j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es la matriz obtenida de A al intercambiar su columna i-ésima con la j-ésima.

2. $AE_{\alpha F_i} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es la matriz obtenida de A al multiplicar su columna i-ésima por un escalar $\alpha \neq 0$.

3. $AE_{F_i+\alpha F_j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es la matriz obtenida de A sumándole a su columna j-ésima la i-ésima multiplicada por $\alpha \in K$.

La observación anterior nos indica que $E_{F_i\leftrightarrow F_j}$ es la matriz obtenida de la identidad intercambiando la columna i-ésima con la j-ésima, $E_{\alpha F_i}$ es la matriz obtenida de la identidad multiplicando la columna i-ésima por un escalar $\alpha \neq 0$ y $E_{F_i+\alpha F_j}$ es la matriz obtenida de la identidad sumándole a la columna j-ésima la i-ésima multiplicada por $\alpha \in K$. Esto justifica la notación siguiente:

$$E_{F_i\leftrightarrow F_j} = E_{C_i\leftrightarrow C_j},\ E_{\alpha F_i} = E_{\alpha C_i},\ E_{F_i+\alpha F_j} = E_{C_j+\alpha C_i}.$$

1.4. Forma escalonada y rango por filas de una matriz

Definición 1.20. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se dice que A es *escalonada por filas* si:

1. Las filas nulas, si las hay, están al final.
2. El primer coeficiente no nulo de cada fila no nula, llamado *coeficiente principal* o *pivote* de la fila, está a la derecha de los pivotes de las filas anteriores.

Si además todos los pivotes son 1 y los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila son todos cero, se dice que es *escalonada reducida por filas.*

Nótese que si una matriz es escalonada reducida por filas, el número de pivotes coincide con el número de filas no nulas.

Proposición 1.21. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es escalonada reducida por filas, entonces*

$$A \text{ es invertible si, y solo si, } A = I_n.$$

Demostración.
"$\Rightarrow$" Si A es invertible ninguna de sus filas es nula y, como es escalonada, el número de pivotes coincide con el número de filas y, por tanto, con el número de columnas. Además, por ser A reducida, se tiene que $A = I_n$.

"$\Leftarrow$" Trivial. □

Teorema 1.22. *Toda matriz es equivalente por filas a una matriz escalonada y a una única matriz escalonada reducida por filas.*

Demostración. Ver álgebra Lineal de L. Merino y E. Santos, pág. 21, o Álgebra Lineal y aplicaciones de J. Arvesú, R. Álvarez y F. Marcellán, pág. 43. □

Ejercicio 1.23. Calcular una matriz escalonada equivalente por filas a la matriz A y una escalonada reducida equivalente por filas a la matriz B, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

Prueba.
Para la matriz A se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Análogamente para la matriz B,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-9F_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-3F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corolario 1.24. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

A es invertible $\Leftrightarrow$ A e I_n son equivalentes por filas $\Leftrightarrow$ A es producto de matrices elementales.

Algoritmo para calcular la inversa de una matriz

Si A es no singular y si $t_1, \ldots, t_s$ es la sucesión de operaciones elementales por filas que transforman la matriz A en I_n, estas operaciones, en el mismo orden, también transforman la matriz I_n en A^{-1}, de manera que el esquema

$$(A|I_n) \xrightarrow[t_1]{} \cdots \xrightarrow[t_s]{} (I_n|A^{-1})$$

nos indica como calcular la inversa de una matriz no singular, usando transformaciones elementales por filas.

Ejemplo 1.25.

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Para calcular la inversa de la matriz A procedemos del modo siguiente:

$$(A|I_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-3F_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y, así, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Definición 1.26. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, llamaremos *rango por filas de A*, y lo denotaremos por $r_f(A)$, al número de pivotes (o el número de filas no nulas) de cualquier matriz escalonada por filas que sea equivalente por filas a A.

Observación 1.27.

El rango por filas está bien definido, ya que cualquiera de las matrices escalonadas que sean equivalentes por filas a A tiene el mismo número de pivotes. En efecto, si B es una matriz escalonada por filas, su número de pivotes coincide con el número de pivotes de la única escalonada reducida a la que es equivalente por filas, ya que:

- Si el pivote de la fila i, está la columna j, es $\alpha = b_{ij}$, se convierte en 1 haciendo $E_{\alpha^{-1}F_i}B$.
- Cada uno de los elementos no nulos de la columna j, $b_{kj} \neq 0$, $k = 1, \ldots, i-1$, se convierte en 0 haciendo $E_{F_k - b_{kj}F_i} E_{b_{ij}^{-1}F_i} B$.

1.5. Determinantes

En este apartado, las matrices que se consideran son matrices cuadradas.

El concepto de determinante de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$, puede ser definido por inducción:

Para $n = 1$, se define $|A| = \det(A) = a_{11}$.

Sea $n > 1$. Supuesto conocido el valor del determinante de una matriz de orden $n-1$, se define el determinante de la matriz A de orden n como:

$$|A| = \det(A) = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}.$$

Siendo $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, en donde A_{ij} es la matriz de orden $n-1$ que se obtiene de A suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima. El escalar α_{ij} se llama *adjunto del elemento* a_{ij} de A.

La fórmula anterior se conoce como el *desarrollo de Laplace del determinante de A* por la primera columna.

Veremos, más adelante, que esta definición no depende de la columna elegida, de modo que

$$|A| = \det(A) = a_{1j}\alpha_{1j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}, \text{ para cualquier } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

y que también se puede calcular cambiando el papel de las columnas por filas, es decir,

$$|A| = \det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}\alpha_{in}, \text{ para cualquier } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ejemplos 1.28.

1. El determinante de una matriz de orden 2 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

2. (*Regla de Sarrus)* El determinante de una matriz de orden 3 es:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 8 - 6 - 2 - 0 = 0.$$

4. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz triangular superior, $|A| = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Se demuestra por inducción en n. Si $n = 1$, $|A| = a_{11}$. Si $n > 1$ y suponemos que se verifica el resultado para matrices de orden $n-1$, para una matriz A de orden n, tenemos que $|A| = a_{11}\alpha_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11})$.

Como A_{11} es una matriz triangular superior de orden $n-1$, $\det(A_{11}) = a_{22} \cdots a_{nn}$ y, por tanto, $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

En particular, $\det(I_n) = 1$.

Determinantes y operaciones elementales

En el tema anterior aprendimos a transformar una matriz cuadrada A en una triangular superior $T = (d_{ij})$, realizando operaciones elementales en sus filas. Puesto que sabemos que $\det(T) = d_{11} \cdots d_{nn}$, vamos a ver como afecta cada operación elemental en las filas de una matriz al cálculo de su determinante, lo que nos permitirá calcular $\det(A)$, de manera rápida, a partir de $\det(T)$.

Proposición 1.29. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si A, A' y $A'' \in \mathcal{M}_n(K)$ son tales que $F_i(A) = F_i(A') + F_i(A'')$ y, si $j \neq i$, $F_j(A) = F_j(A') = F_j(A'')$, se tiene que* $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tiene dos filas iguales, entonces* $\det(A) = 0$.

3. *Si se intercambian dos filas de $A \in \mathcal{M}_n(K)$, el determinante de la matriz resultante es* $-\det(A)$.

En particular, se obtiene que

$\det(E_{F_i \leftrightarrow F_j}) = -\det(I_n) = -1$ *y que* $\det(E_{F_i \leftrightarrow F_j}A) = \det(E_{F_i \leftrightarrow F_j})\det(A)$.

4. *Si multiplicamos los elementos de una fila de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ por un escalar β, obtenemos una matriz cuyo determinante es $\beta \det(A)$.*

En particular, si A tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$. Además, si $\beta \neq 0$, $\det(E_{\beta F_i}) = \beta \det(I_n) = \beta$ y $\det(E_{\beta F_i} A) = \det(E_{\beta F_i}) \det(A)$.

5. *Si a la fila i-ésima de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ le sumamos la j-ésima multiplicada por un escalar β, siendo $i \neq j$, obtenemos una matriz cuyo determinante es $\det(A)$.*

En particular, se tiene que

$$\det(E_{F_i+\beta F_j}) = \det(I_n) = 1 \ \text{y} \ \det(E_{F_i+\beta F_j} A) = \det(E_{F_i+\beta F_j}) \det(A).$$

Demostración. La demostración de las propiedades 1 y 2, se puede consultar en el libro "Álgebra lineal con métodos elementales" de Merino L. y Santos E.

3.

$$0 = \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_i(A) + F_j(A) \\ \cdots \\ F_j(A) + F_i(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix}$$

4. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n, usaremos inducción en n para probar esta propiedad. Si $n = 1$ es evidente. Supuesto $n > 1$ y que el resultado es cierto para matrices de orden $n - 1$, si

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta a_{i1} & \cdots & \beta a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se tiene que $\det(A') = a_{11}\alpha'_{11} + \cdots + \beta a_{i1}\alpha'_{i1} \cdots + a_{n1}\alpha'_{n1}$. Como $\alpha'_{i1} = \alpha_{i1}$ y, por hipótesis de inducción, para $t \neq i$ se tiene que $\alpha'_{t1} = \beta\alpha_{t1}$, obtenemos que $\det(A') = a_{11}\beta\alpha_{11} + \cdots + \beta a_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{n1}\beta\alpha_{n1} = \beta \det(A)$.

5. Utilizando las propiedades 1, 4 y 2, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_i(A)+\beta F_j(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_i(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} F_1(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_j(A) \\ \cdots \\ F_n(A) \end{vmatrix} = |A| \,.$$

□

Observaciones 1.30.

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $\beta \in K$, se verifica que $|\beta A| = \beta^n |A|$.

   Es consecuencia inmediata de que $\beta A = E_{\beta F_1} \cdots E_{\beta F_n} A$ y de la propiedad 3 anterior.

2. Si A' es la matriz obtenida de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ sumándole a una fila una combinación lineal de las demás, $|A'| = |A|$.

   Es consecuencia de la propiedad 5.

Proposición 1.31. *Si A es una matriz de orden n,*

$$A \text{ es no singular si, y solo si, } |A| \neq 0.$$

Demostración. A es no singular si, y solo si, existen $E_1, \ldots, E_s$ matrices elementales tal que $A = E_1 \cdots E_s$, de donde se sigue que

$$|A| = |E_1 \cdots E_s| = |E_1|\,|E_2 \cdots E_s| = \cdots = |E_1| \cdots |E_s| \neq 0.$$

A es singular si, y solo si, A es equivalente por filas a una matriz escalonada por filas A' que tiene una fila de ceros si, y solo si, existen $E_1, \ldots, E_s$ matrices elementales tal que $A = E_1 \cdots E_s A'$, de lo que se deduce que

$$|A| = \left|E_1 \cdots E_s A'\right| = |E_1| \left|E_2 \cdots E_s A'\right| = \cdots = |E_1| \cdots |E_s| \left|A'\right| = 0.$$ □

Teorema 1.32. *Si A y B son matrices de orden n, entonces $|AB| = |A|\,|B|$.*

Demostración.
Caso 1) Si A es no singular.

Hemos visto que:

Si A es no singular, A es producto de matrices elementales, es decir, $A = E_1 \cdots E_k$ y $|A| = |E_1| \cdots |E_s| \neq 0$.

Utilizando reiteradamente las propiedades 3, 4 y 5 de la proposición 1.29 y que el producto de matrices es asociativo, se tiene que:

$$|AB| = |E_1(E_2 \cdots E_k B)| = |E_1|\,|E_2 \cdots E_k B| = \cdots = |E_1|\,|E_2| \cdots |E_k|\,|B| = |A|\,|B|\,.$$

Caso 2) Si A es singular.

Existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_s$ y una matriz A' que tiene una fila de ceros tal que $A = E_1 \cdots E_s A'$ y $|A| = 0$.

Así, $|AB| = |E_1 \cdots E_s A'B| = \cdots = |E_1| \cdots |E_s|\,|A'B| = 0$, puesto que la matriz $A'B$ tiene también alguna fila de ceros, y $|AB| = 0 = |A|\,|B|$. □

Pretendemos ahora ver que el desarrollo de Laplace para el calculo del determinante puede hacerse a lo largo de cualquier columna o de cualquier fila y, para ello, veremos que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

Lema 1.33. *La traspuesta de una matriz elemental, E, es una matriz elemental que tiene mismo determinante que E.*

Demostración. El resultado es consecuencia inmediata de que

$$\begin{aligned}
&(E_{F_i \leftrightarrow F_j})^t = (E_{C_i \leftrightarrow C_j})^t = E_{F_i \leftrightarrow F_j},\\
&E^t_{\alpha F_i} = E^t_{\alpha C_i} = E_{\alpha F_i} \text{ y}\\
&(E_{F_i + \alpha F_j})^t = (E_{C_j + \alpha C_i})^t = E_{F_j + \alpha F_i}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.34. *Si A es una matriz de orden n, entonces $|A| = \left|A^t\right|$.*

Demostración. Sabemos que A es no singular si, y solo si, A^t es no singular $[(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}]$. Por tanto, $|A| = 0$ si, y solo si, $\left|A^t\right| = 0$.

Supongamos ahora que $|A| \neq 0$, es decir, existen $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tal que $A = E_1 \cdots E_k$ y, así, $A^t = (E_k)^t \cdots (E_1)^t$.

En consecuencia, $\left|A^t\right| = \left|(E_k)^t\right| \cdots \left|(E_1)^t\right| = |E_k| \cdots |E_1| = |A|$. □

Corolario 1.35. *Las proposición 1.29 es válida si se cambia la palabra fila por columna.*

Corolario 1.36 (Desarrollo de Laplace del determinante por la primera fila)**.**

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden n, entonces

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}.$$

Demostración. Basta con observar que la primera columna de A^t es $(a_{11}, \ldots, a_{1n})^t$ y los adjuntos de los elementos de la primera columna de A^t coinciden con los correspondientes a los elementos de la primera fila de A.

En efecto, como

$$\begin{aligned}
&(A_{1j})^t = (A^t)_{j1}, \text{ para todo } j, \text{ y} \\
&\alpha_{1j} = (-1)^{1+j}\det(A_{1j}) = (-1)^{1+j}\det(A_{1j})^t = (-1)^{1+j}\det((A^t)_{j1}),
\end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
|A| = \left|A^t\right| &= a_{11}(-1)^{1+1}\det((A^t)_{11}) + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1}\det((A^t)_{n1}) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1}\det(A_{1n}) = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}. \square
\end{aligned}$$

Proposición 1.37 (Desarrollo de Laplace del determinante por cualquier columna (respectivamente fila))**.**

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden n, entonces

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{1j}\alpha_{1j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}, \ \textit{para } j = 1, \ldots, n, \\
|A| &= a_{i1}\alpha_{i1} + \cdots + a_{in}\alpha_{in}, \ \textit{para } i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $A' = E_{F_1 \leftrightarrow F_2}A$ la matriz obtenida de A intercambiando la primera fila con la segunda. Calculando el determinante de A' con el desarrollo de Laplace por la primera fila:

$$\left|A'\right| = a_{21}(-1)^{1+1}\det(A_{21}) + a_{22}(-1)^{1+2}\det(A_{22}) + \cdots + a_{2n}(-1)^{1+n}\det(A_{2n})$$

y, como $|A| = -\left|A'\right|$, se tiene que:

$$|A| = a_{21}(-1)^{2+1}\det(A_{21}) + \cdots + a_{2n}(-1)^{2+n}\det(A_{2n}) = a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{2n}\alpha_{2n}.$$

De la misma forma, si A'' es la matriz obtenida de A intercambiando la segunda fila con la tercera, calculando el desarrollo de Laplace de A'' por su segunda fila, se obtiene:

$$\left|A''\right| = a_{31}(-1)^{2+1}\det(A_{31}) + a_{32}(-1)^{2+2}\det(A_{32}) + \cdots + a_{3n}(-1)^{2+n}\det(A_{3n})$$

y, por tanto, como $|A| = -\left|A''\right|$, se tiene que:

$$|A| = a_{31}(-1)^{3+1}\det(A_{31}) \cdots + a_{3n}(-1)^{3+n}\det(A_{3n}) = a_{31}\alpha_{31} + \cdots + a_{3n}\alpha_{3n}.$$

Repitiendo el proceso las veces que sea necesario, se obtiene el desarrollo por cualquier otra fila y, teniendo en cuenta que $|A| = \left|A^t\right|$, se obtiene el desarrollo por cualquier columna. $\square$

Proposición 1.38. *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz no singular de orden n, entonces*

$$A^{-1} = |A|^{-1}\,(adj(A))^t, \text{ en donde } adj(A) = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K).$$

Demostración. Como $|A| \neq 0$, podemos definir la matriz $B := |A|^{-1}\,(adj(A))^t$. La matriz B es de orden n y vamos a comprobar que es inversa de A. En efecto,

$$(AB)(i,i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}B(k,i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,|A|^{-1}\,\alpha_{ik} = |A|^{-1}\,|A| = 1$$

y, si $i \neq j$, se tiene que

$$(AB)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}B(k,j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,|A|^{-1}\,\alpha_{jk} = |A|^{-1}\,(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{jk}) = 0$$

ya que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{jk} = 0$, porque es el desarrollo de Laplace, a lo largo de la fila j-ésima, del determinante de una matriz que tiene todas sus filas como las de A, excepto la j-ésima que coincide con la i-ésima de A, es decir, es el determinante de una matriz con dos filas iguales. □

1.6. Ejercicios

1.- Evaluar las siguientes operaciones con matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.- Una matriz A se dice idempotente si $A^2 = A$.

a) Probar que una matriz idempotente es cuadrada.

b) ¿Son idempotentes las matrices siguientes?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.- Se consideran las matrices sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $AB = BA$.

b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c) $A(A+B) = A^2 + AB$.

4.- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz no singular. Demostrar las siguientes propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$, $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.

c) A es simétrica $\Leftrightarrow$ A^{-1} es simétrica.

5.- Sea $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2/2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Demostrar que $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta)$.

b) Demostrar que $A(3\alpha) - 3A(2\alpha) + 3A(\alpha) = I_3$.

6.- Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es también una matriz diagonal. ¿Es conmutativo este producto?

7.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Justificar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $A+B$ es una matriz diagonal, entonces A y B son matrices diagonales.

b) Si A es una matriz diagonal, entonces AB es una matriz diagonal.

c) Si $\alpha \neq 0$ y αA es una matriz diagonal, entonces A es una matriz diagonal.

d) Si AB es una matriz diagonal, entonces A y B son matrices diagonales.

8.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Hallar una fórmula para A^n, siendo n un entero positivo.

9.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, demostrar que $A^2 = 2A - I_2$ y calcular A^{100}.

10.- Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ tales que

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \alpha \;\forall\; i = 1, \ldots, 5 \text{ y } b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} + b_{i4} = \beta \;\forall\; i = 1, \ldots, 3.$$

Demostrar que la suma de los elementos de cada una de las filas de la matriz producto AB es $\alpha\beta$.

11.- Halla una matriz elemental E que transforma la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en B, donde:

$$a)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};\ c)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.- Encontrar, justificando la respuesta, matrices elementales E_1, E_2, E_3, E_4 tales que:

a) $E_1A = B$; **b)** $E_2B = A$; **c)** $E_3A = C$; **d)** $E_4C = A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Es posible encontrar una matriz elemental E tal que $EB = C$? Justifica la respuesta.

13.- Encontrar una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que verifique la igualdad siguiente:

$$E_{F_1+2F_3}E_{F_2\leftrightarrow F_1}AE_{(-4)F_3} = I_3.$$

14.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tales que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotando por A_1 la matriz obtenida a partir de A multiplicando su fila 2 por 3, A_2 la matriz obtenida a partir de A intercambiando su fila 1 y su fila 3 y B_3 la matriz obtenida a partir de B multiplicando su columna 2 por 2.

Calcular, usando las matrices elementales, las siguientes matrices:

$$(A_1)^{-1},\ (A_2)^{-1},\ A_1B,\ A_2B \text{ y } AB_3.$$

15.- Sean $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tales que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotando por A_1 la matriz obtenida a partir de A multiplicando su fila 3 por -2, A_2 la matriz obtenida a partir de A intercambiando su fila 3 y su fila 2 y B_3 la matriz obtenida a partir de B sumándole a su columna 3 la colunma 2 multiplicada por $-\frac{1}{2}$. Calcular, usando las matrices elementales, las siguientes matrices:

$$(A_1)^{-1},\ (A_2)^{-1},\ A_1B,\ A_2B \text{ y } AB_3.$$

16.- Calcular el rango por filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

17.- Hallar en función de a y b los rangos por filas de:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & a+2 & a \\ 3 & 5 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

18.- Calcular el rango por filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).$$

19.- Calcular las inversas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

y escribir A y B^{-1} como un producto de matrices elementales.

20.- Calcular, cuando exista , la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

21.- Calcular los valores de a para que la siguiente matriz tenga inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

22.- Se consideran las siguientes matrices sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 \\ \beta & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular, usando operaciones elementales, A^{-1} y B^{-1}.

b) Utilizando el apartado anterior, calcular $(3A)^{-1}$ y $5(B^t)^{-1}$.

23.- Calcular, utilizando las operaciones elementales, la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).$$

24.- Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 1+a & a+a^2 & a^2+a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

a) Hallar, usando operaciones elementales, la inversa de la matriz A.

b) Calcular B^{-1} a partir de A^{-1}.

25.- Demostrar que el determinante del producto de una matriz 2×1 por otra 1×2 es siempre cero.

26.- Sean A,$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $|A + B| = |A| + |B|$.

b) $|\alpha A| = \alpha\, |A|$.

c) $|\alpha A| = \alpha^n\, |A|$.

d) $|-A| = (-1)^n\,|A|$.

e) Si AB tiene inversa también la tienen A y B.

f) Si $|AB| = 0$, entonces $|A| = |B| = 0$.

27.- Sean A,$B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tales que $|A| = 3$ y $|B| = 5$. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$AB,\ -A, 3B,\ A^{-1}B \text{ y } A^t E_{F_1\leftrightarrow F_2} B^{-1}.$$

28.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & a \\ c & c & b & a \\ d & c & b & a \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}.$$

29.- Sabiendo que los números 1353, 3751, 8492 y 6105 son todos divisibles por 11, demostrar que el determinante de la siguiente matriz es, también, un múltiplo entero de 11:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

30.- Calcular $A^{-1}B$, sin hallar previamente A^{-1}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

31.- Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ formada por números enteros entre 0 y 9. Demostrar que si las filas (las columnas) de A, leídas como un número de n dígitos, forman un múltiplo de 3, entonces $|A|$ también es un múltiplo de 3.

32.- Resolver en $\mathbb{Z}$ la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & x \\ 0 & 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & -1 & x \\ x & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 2.$$

33.- Determinar los valores reales de x para los que se verifica que $|A| \neq 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

34.- Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

por el procedimiento de llevarlo a la forma triangular.

35.- Calcular el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

36.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices reales de orden n :

a) $A = (a_{ij})$ siendo $a_{ij} = \max\{i,j\}$.

b) $B = (b_{ij})$ siendo $b_{ij} = \min\{i,j\}$.

c) $C = \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}.$

37.- Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

38.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = -(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d).$$

39.- Una matriz cuadrada es antisimétrica si $A^t = -A$. Probar que si $2 \neq 0$, el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es cero.

40.- Hallar los posibles valores del determinante de una matriz A, en cada uno de los siguientes casos:

a) A es idempotente, es decir $A^2 = A$.

b) A es ortogonal, es decir $AA^t = I$.

c) A es nilpotente, es decir existe n tal que $A^n = 0$.

41.- Sean A, $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tales que $|A| = -3$ y $|B| = 9$, calcular el determinante de la matriz $\dfrac{1}{3}A^3B^{-1}A^t$.

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

A partir de ahora, K denotará un cuerpo.

2.1. Ecuaciones lineales

Definición 2.1. Una *ecuación lineal* con coeficientes en K y con n *incógnitas* (o *variables*) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (*)$$

en donde los elementos $a_i \in K$, para $i = 1, \ldots, n$, se llaman *coeficientes de la ecuación* y $b \in K$ se llama *término independiente.*

Diremos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ es *solución de la ecuación lineal* $(*)$ si

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$

es decir, al sustituir $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ en $(*)$ se verifica la igualdad anterior.

Si el número de incógnitas es pequeño estas se denotarán, usualmente, por las letras $x, y, z, t, \ldots$.

Ejemplos 2.2.

1. $(0, 0)$ y $(2, -1) \in \mathbb{R}^2$ son soluciones de la ecuación lineal $x + 2y = 0$.

2. La ecuación $x^2 + 2y = 1$ no es lineal.

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.3. Una colección de m ecuaciones lineales con coeficientes en K con las mismas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (S),$$

se llama *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.* En forma abreviada,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ para } i = 1, \ldots, m.$$

Los a_{ij} para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, se llaman *coeficientes del sistema* y los b_i, para $i = 1, \ldots, m$, se llaman *términos independientes del sistema.*

Si $b_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$, es decir, si todos los términos independientes son cero, se dice que el *sistema* es *homogéneo.*

Una n-épla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ es una *solución del sistema S*, si lo es de cada una de sus m ecuaciones.

Un sistema es *compatible* si admite alguna solución. En caso contrario, se dice que es *incompatible.* Cuando un sistema compatible tiene una única solución se dice que es *compatible determinado* y, si tiene más de una, se dice que es *compatible indeterminado.*

Todo sistema homogéneo es compatible, puesto que $(0, \ldots, 0) \in K^n$ es una solución a la que se le llamará *solución trivial.*

Ejemplos 2.4.

Sean tres sistemas con coeficientes en $\mathbb{R}$:

1.

$\left\{\begin{array}{ll} x + y & = 2 \\ x + y & = 7 \end{array}\right.$ es un sistema incompatible y representa a dos rectas paralelas.

2.

$\left\{\begin{array}{ll} x + y & = 2 \\ \quad y & = 7 \end{array}\right.$ es un sistema compatible determinado, puesto que $(-5, 7)$ es su única solución. Representa a dos rectas que se cortan en el punto $(-5, 7)$.

3.

$\left\{\begin{array}{llll} x & + & y & = 2 \\ 2x & + & 2y & = 4 \end{array}\right.$ es un sistema compatible indeterminado, puesto que tiene más de una solución, por ejemplo $(1, 1)$ y $(0, 2)$. Se trata ahora de dos rectas coincidentes.

2.3. Interpretación matricial de un sistema

Dado un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en K.

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (S)$$

llamaremos:

- *matriz de los coeficientes del sistema* a la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$,
- *matriz de los términos independientes* a la matriz $B = (b_1 \dots b_m)^t \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$,
- *matriz ampliada del sistema* a la matriz

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(K).$$

Si denotamos por $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, el sistema anterior tiene la siguiente expresión matricial:

$$AX = B.$$

Nótese que también se puede expresar como

$$C_1(A)x_1 + \cdots + C_n(A)x_n = B.$$

2.4. Método de Gauss y Regla de Cramer.

Supongamos que queremos resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrl} x + y & +3z & = 4 \\ y & +2z & = 3 \\ & z & = 1 \end{array}\right.$$

La tercera ecuación nos indica que $z = 1$, sustituyendo este valor en la segunda, se tiene que $y = 1$ y, sustituyendo ambos valores en la primera, obtenemos que $x = 0$. Así, $(0, 1, 1)$ es la única solución de este sistema, que es por tanto un sistema compatible determinado.

El método utilizado, de sustitución hacia atrás, nos permite resolverlo de forma muy sencilla porque está en forma escalonada. En general, un sistema arbitrario no aparece en forma escalonada y, para resolverlo con la técnica anterior, trataremos de transformarlo en otro con las mismas soluciones que se presente en forma escalonada.

Definición 2.5. Dos sistemas con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ se dicen *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Vamos a considerar tres tipos de operaciones que nos permitirán transformar un sistema, S, en otro que sea equivalente, S'. A estas operaciones les llamaremos *operaciones elementales* y son las siguientes:

1. Intercambiar dos ecuaciones ($F_i \leftrightarrow F_j$).
2. Multiplicar una ecuación por $\alpha \in K$ y $\alpha \neq 0$ (αF_i).
3. Sumarle a una ecuación otra multiplicada por $\alpha \in K$. ($F_i + \alpha F_j$ con $i \neq j$).

Nótese que:

$$S \xrightarrow[F_i \leftrightarrow F_j]{} S' \xrightarrow[F_i \leftrightarrow F_j]{} S$$
$$S \xrightarrow[\alpha F_i]{} S' \xrightarrow[\frac{1}{\alpha} F_i]{} S$$
$$S \xrightarrow[F_i + \alpha F_j]{} S' \xrightarrow[F_i - \alpha F_j]{} S.$$

Proposición 2.6. *Si S es un sistema de ecuaciones lineales, todo sistema, S', obtenido a partir de S tras un número finito de operaciones elementales, es equivalente a S.*

Demostración. Es suficiente demostrar que cada una de las operaciones elementales transforma un sistema en otro equivalente. □

Definición 2.7. Un sistema de ecuaciones lineales se dice *escalonado* si su matriz ampliada es una matriz escalonada. En un sistema escalonado las incógnitas correspondientes a los pivotes se llamarán *incógnitas principales* y las demás *incógnitas libres.*

Proposición 2.8. *Todo sistema de ecuaciones lineales es equivalente a un sistema escalonado.*

Demostración. Es evidente que las operaciones elementales en las ecuaciones de un sistema se corresponden biyectivamente con las correspondientes operaciones elementales en las filas de la matriz ampliada. El resultado se sigue de que, como ya vimos, toda matriz es equivalente por filas a una matriz escalonada. □

El *Método de Gauss* consiste en transformar, usando operaciones elementales, un sistema en otro equivalente que sea escalonado y resolver este, si es posible, usando sustitución hacia atrás o concluir que no tiene solución.

Ejemplos 2.9. Vamos a resolver tres sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$.

1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}\right. \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+F_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & - & y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[F_3+F_2]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

La única solución de este sistema es $(1,-1,2)$. Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado.

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & 3z & = & -1 \\ -x & + & 3y & & & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_1]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & & & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[F_3+F_1]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow[F_3-3F_2]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array}\right.$$

Las ternas de la forma $(-1+3z,z,z)$ con $z\in\mathbb{R}$ son las soluciones del sistema. Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado en donde x e y son las incógnitas principales y z la incógnita libre.

3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow[F_2-2F_1]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 4z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[F_3-F_1]{} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ & & 5y & - & 4z & = & 0 \\ & & 5y & - & 4z & = & -2 \end{array}\right. \xrightarrow[F_3-F_2]{} \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 3y+ & z = & 1 \\ & 5y- & 4z = & 0 \\ & 0y- & 0z = & -2 \end{array}\right.$$

La última ecuación nos indican que se trata de un sistema incompatible.

4.

$$\left\{\begin{array}{rrl} ax & +y & =1 \\ (a+1)x & +y & =2 \end{array}\right. \xrightarrow[F_2-F_1]{} \left\{\begin{array}{rrl} ax & +y & =1 \\ x & & =1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{} \left\{\begin{array}{rrl} x & & =1 \\ ax & +y & =1 \end{array}\right. \xrightarrow[F_2-aF_1]{} \left\{\begin{array}{rrl} x & & =1 \\ & y & =1-a \end{array}\right.$$

o bien, si escalonamos el sistema considerando las variables en otro orden se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{lrl} y & +ax & =1 \\ y & +(a+1)x & =2 \end{array}\right. \xrightarrow[F_2-F_1]{} \left\{\begin{array}{lrl} y & +ax & =1 \\ & x & =1 \end{array}\right.$$

Nótese que es un sistema compatible determinado con solución $(1, 1-a)$.

Como se aprecia en los ejemplos anteriores, el método utilizado solo afecta a los coeficientes y a los términos independientes del sistema y, por lo tanto, se pueden dejar de escribir las variables y hacer las mismas transformaciones en una tabla (matriz) en donde aparezcan ordenados solamente los coeficientes y los términos independientes.

5. Sea el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Consideramos su matriz ampliada y la escalonamos de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, un sistema equivalente al de partida es:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

cuya solución se obtiene usando sustitución hacia atrás, como se indicó anteriormente.

También se puede continuar el proceso hasta llegar a una matriz que sea escalonada reducida,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1-9F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-3F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que es la matriz ampliada del sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 2 \end{array} \right.$$

y que permite encontrar de manera inmediata su solución, $(1, -1, 2)$.

2.5. Discusión de un sistema escalonado

Para un sistema arbitrario, S, de m ecuaciones lineales con n incógnitas, una vez que hemos escalonado su matriz ampliada, de orden $m \times (n+1)$, hasta una matriz escalonada reducida, se pueden dar los siguientes casos:

1. Si hay un pivote en la última columna, el sistema es incompatible ya que corresponde a una ecuación de la forma $0x_1 + \cdots + 0x_n = 1$.

2. Si no hay pivote en la última columna, se pueden dar dos posibilidades:

a) Número de pivotes = número de incógnitas = n. En éste caso, existe una única solución y la solución viene dada por la última columna. Es decir, la matriz escalonada reducida tiene una de las formas siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema es $(b_1, \dots, b_n) \in K^n$.

b) Número de pivotes $<$ número de incógnitas. En éste caso, hay más de una solución y estas estarán parametrizadas por las variables libres.

Dicho de otro modo, en un sistema escalonado de m ecuaciones lineales con n incógnitas y r pivotes ($r \leq n+1$), se verifica que:

1. Si el último pivote está en la última columna, es decir, la última ecuación no nula (la r-ésima) tiene término independiente distinto de cero y, por tanto, es de la forma $0x_1 + \cdots + 0x_n = b$, con $b \neq 0$, el sistema es incompatible.

2. Si el último pivote no está en la última columna, hay dos posibilidades:

a) Si $r = n$, entonces el sistema es compatible determinado.

b) Si $r \neq n$, es decir $r < n$, entonces el sistema es compatible indeterminado. Para cada valor asignado a cada una de las $n - r$ incógnitas libres se obtiene una solución del sistema.

Ejemplos 2.10.

1. El sistema visto en el ejemplo 2.9, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}, \text{ está en el caso } \mathbf{2a)}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema cuya matriz ampliada es A corresponde al caso **2b)**; de la segunda ecuación se obtiene que $z = 1$ y, sustituyendo éste valor en la primera, se tiene que $x = 1 - 2y$. Por tanto, las soluciones del sistema son las ternas de la forma $(1 - 2y, y, 1)$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema cuya matriz ampliada es B está en la situación **1)** y se trata de un sistema incompatible.

Proposición 2.11. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Un sistema $AX = B$ es compatible determinado si, y solo si, A es no singular.*

Demostración.
"$\Leftarrow$" Si A es no singular, entonces $X = A^{-1}B$.

"$\Rightarrow$" Si $AX = B$ es compatible determinado, A es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida cuyo número de pivotes coincide con el número de incógnitas, es decir, A es equivalente por filas a la matriz I_n y, por tanto, es no singular. □

Proposición 2.12 (Regla de Cramer)**.** *Si $AX = B$ es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas compatible determinado, su única solución viene dada por:*

$$x_i = |A|^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \textit{ para } i = 1, \dots, n.$$

Demostración. Si $AX = B$, al ser A no singular, $X = A^{-1}B = |A|^{-1}\,(adj(A))^t B$ y entonces

$$x_i = X(i,1) = |A|^{-1} \sum_{k=1}^{n} ((adj(A))^t)(i,k) b_k = |A|^{-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} b_k = |A|^{-1} \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_{ki}.$$

Nótese que $\sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_{ki}$ es el desarrollo, por la columna i-ésima, del determinante de una matriz que se obtiene de la matriz A cambiando su columna i-ésima por la de los términos independientes del sistema. $\square$

2.6. Ejercicios

1.- Resolver, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$:

a) $$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & -t & = & 1 \\ & y & -z & +t & = & -1 \\ 3x & & +6z & -6t & = & 6 \\ & -y & +z & -t & = & 1 \end{array} \right.$$

b) $$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & & +z & & = & 2 \\ x & +2y & & & = & 1 \\ 4x & +4y & +z & -t & = & 5 \end{array} \right.$$

c) $$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & -4z & = 0 \\ 3x & +5y & -7z & = 0 \\ 4x & -5y & -6z & = 0 \end{array} \right.$$

d) $$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 6 \\ 2x & -y & +z & = 3 \\ 3x & & -z & = 0 \end{array} \right.$$

e) $$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 6 \\ 2x & +3y & & -t & = & 0 \\ -3x & +4y & +z & +2t & = & 4 \\ x & +2y & -z & +t & = & 0 \end{array} \right.$$

2.- Resolver simultáneamente los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +3z & = & 2 \\ x & -3y & +z & = & 1 \\ 5x & -8y & +6z & = & -2 \end{array} \right. \text{ y } \left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +3z & = & 1 \\ x & -3y & +z & = & -2 \\ 5x & -8y & +6z & = & -5 \end{array} \right.$$

3.- Calcular el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que sea compatible e indeterminado el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} \alpha x & +y & +z & = \alpha \\ x & +\alpha y & +z & = \alpha \\ x & +y & +\alpha z & = \alpha \end{array} \right.$$

Para este valor, calcular la componente x de la solución tal que $y = 1$ y $z = 4$.

4.- Determinar para que valores reales de a el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$ siguiente tiene solución única, tiene infinitas soluciones y no tiene solución.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 4 \\ & & z & = & 2 \\ & & (a^2-4)z & = & a-2 \end{array}\right.$$

5.- Dado el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & -2 \\ -x & +y & +\alpha z & = & 1 \\ 2x & +\alpha y & +4z & = & -2 \end{array}\right.$$

Discutir su compatibilidad, en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, y resolverlo en los casos en que sea compatible.

6.- Hallar condiciones sobre el parámetro k que hagan compatible el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 3 \\ -x & -y & +z & = & 2 \\ -x & +y & +z & = & k \end{array}\right.$$

7.- Hallar los valores reales del parámetro α para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$ tenga soluciones no triviales.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} (\alpha+2)x & -2y & +3z & = & 0 \\ -2x & +(\alpha-1)y & +6z & = & 0 \\ x & +2y & +\alpha z & = & 0 \end{array}\right.$$

8.- Sea $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ la matriz ampliada de un sistema S. Encontrar los valores que deben tomar a y b en los siguientes casos:

a) S tiene solución única.

b) S no tiene solución.

c) Las soluciones de S vienen dadas en función de un parámetro.

d) Las soluciones de S vienen dadas en función de dos parámetros.

9.- Discutir, en función de los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$ siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +\alpha y & +z & = & 1 \\ -x & +(2-\alpha)y & & = & 1 \\ (1-\alpha)x & +(-\alpha^2+\alpha-2)y & +(1-2\alpha)z & = & -\alpha^2-\alpha \end{array}\right.$$

10.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +(\alpha+1)z & = & 4 \\ & -y & +3z & = & \beta \\ 2x & +y & -z & = & 3 \end{array}\right.$$

¿Cuándo es compatible indeterminado?

11.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ (1+b^2)x & +2y & +2z & = & 2b \\ (1-b)x & & +z & = & -b \\ b^2x & +y & +z & = & b \end{array}\right.$$

a) Analizar para que valores $b \in \mathbb{R}$ el sistema tiene alguna solución.

b) Resolver el sistema para los valores de b encontrados en el apartado anterior.

12.- Siendo $b \in \mathbb{R}$ consideramos los sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$:

a) $\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 3 \\ bx & +y & & = & b \\ & 2y & +z & = & 2 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rrrcr} bx & +y & -z & = & b \\ x & +by & +z & = & 1 \\ x & +y & -2bz & = & 2 \end{array}\right.$

Estudiar su compatibilidad para los diferentes valores de b y resolverlos en los casos en que sean compatibles.

13.- Sea el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$ siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x & -y & = 5 \\ x & -3y & = 5 \\ x & +5y & = \alpha \\ x & +\beta y & = 3 \\ \gamma x & +2y & = 4 \end{array}\right.$$

Resolverlo para los valores de α, β, γ que lo hagan compatible.

14.- Se consideran los sistemas siguientes:

$$S\left\{\begin{array}{c} a_1x + a_2y = a_0 \\ b_1x + b_2y = b_0 \end{array}\right. \text{ y } S'\left\{\begin{array}{c} a_1x + a_2y + a_3z = a_0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = b_0 \end{array}\right.$$

con $a_1 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$. Sabiendo que S es incompatible, analizar la posibilidad de que S' sea compatible.

15.- Resolver, sobre $\mathbb{Z}_2$, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & & +z & = & 1 \end{array}\right.$$

16.- Responder razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Todo sistema de una ecuación lineal con dos variables es compatible.

b) Todo sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables es compatible.

c) Si un sistema es compatible admite infinitas soluciones.

d) Un sistema de ecuaciones lineales puede tener exactamente dos soluciones.

e) Todo sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables es incompatible.

17.- Se considera el sistema $AX = B$ con $B \neq 0$ y α y β dos escalares dados. Sabiendo que si X_1 y X_2 son dos soluciones del sistema también es solución $\alpha X_1 + \beta\, X_2$. Analizar la relación que debe existir entre α y β.

18.- Se considera, S, un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas $AX = 0$ y, S', el sistema cuya primera ecuación es la diferencia entre la primera y la segunda de S, su segunda ecuación es la diferencia entre la segunda y la tercera de S y su tercera ecuación es la diferencia entre la tercera y la primera de S. Sabiendo que S es compatible y determinado analizar si también lo es S'.

19.- Se considera un sistema $AX = B$. Estudiar en que caso ocurre que si X_1 y X_2 son dos soluciones del sistema también lo es $X_1 - X_2$.

20.- Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sabiendo que $m < n$, probar que S puede ser incompatible o compatible indeterminado, pero no puede ocurrir que sea compatible determinado.

Capítulo 3

Espacios vectoriales

Definición 3.1. Sea K un cuerpo. Se dice que un conjunto no vacío V es un *espacio vectorial sobre* K o que es un K*-espacio vectorial* si:

1. En V está definida una operación interna que denotaremos por $+$ de modo que $(V, +)$ es un grupo abeliano.

2. Existe una operación externa, llamada producto por escalares:

$$\begin{aligned} K \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

tal que para todo v, $w \in V$ y α, $\beta \in K$ se tiene:

a) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,

b) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$,

c) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$,

d) $1_K v = v$.

Los elementos de V se llaman *vectores* y los de K *escalares*. El elemento neutro para la operación $+$ se denota por 0 y se llama *vector cero*. Dado un vector $v \in V$ su simétrico para $+$ se llama *opuesto de* v y se denota por $-v$.

Ejemplos 3.2.

1. K es un K-espacio vectorial.

2. $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

3. $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es un K-espacio vectorial.

4. $\mathcal{P}_n(K)$ (polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en K) es un K-espacio vectorial.

5. $\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ es aplicación es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

6. $K[x]$ (polinomios con coeficientes en K) es un K-espacio vectorial.

Proposición 3.3. *Si V es un K-espacio vectorial, se verifica:*

1. *Dados $\alpha \in K$ y $v \in V$, $\alpha v = 0$ si, y sólo si, $\alpha = 0$ o $v = 0$.*

2. *Dados α, $\beta \in K$ y $v \in V$, $v \neq 0$, si $\alpha v = \beta v$, entonces $\alpha = \beta$.*

3. *Dados $\alpha \in K$ y $v \in V$, se verifica que $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$.*

Demostración.

1.

"$\Leftarrow$" Como $0v = (0+0)v = 0v + 0v$, se obtiene que $0v = 0$. Análogo si $v = 0$.

"$\Rightarrow$" Si $\alpha v = 0$, con $\alpha \neq 0$, se verifica que $v = 1_K v = (\alpha^{-1}\alpha)v = \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0$.

3. Si $\alpha \in K$ y $v \in V$, se sigue que $(-\alpha)v + \alpha v = (-\alpha + \alpha)v = 0v = 0$.

3.1. Subespacios vectoriales

En adelante, V denotará un K-espacio vectorial.

Definición 3.4. Un subconjunto no vacío, U, de V es un *subespacio de V* si:

1. $u + u' \in U$ para todo u, $u' \in U$.

2. $\alpha u \in U$ para todo $u \in U$ y todo $\alpha \in K$.

Equivalentemente, $\alpha u + \beta u' \in U$ para todo $u, u' \in U$ y todo $\alpha, \beta \in K$.

Nótese que el vector cero de V está en U ya que, como $U \neq \varnothing$, existe $u \in U$ y $0u = 0 \in U$. Además, U es un espacio vectorial con las mismas operaciones que V y también con el mismo neutro para la operación $+$.

Ejemplos 3.5.

1. $\{0\}$ y V son subespacios de V y se llaman *subespacios triviales*.

2. $U = \{(x, 0, y) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

3. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

4. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ x + 2y + z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

5. $U = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid A \text{ es diagonal}\}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_n(K)$.

6. El conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo, de m ecuaciones con n incógnitas y coeficientes en K, es un subespacio de K^n.

Proposición 3.6. *Si U y W son subespacios vectoriales de V, entonces $U \cap W$ es un subespacio de V pero, en general, $U \cup W$ no lo es.*

Demostración. $U \cap W \neq \varnothing$ ya que $0 \in U \cap W$. También se verifica que:

1. $u, w \in U \cap W \Leftrightarrow u, w \in U$ y $u, w \in W \Rightarrow u + w \in U$ y $u + w \in W \Leftrightarrow u + w \in U \cap W$.

2. $u \in U \cap W$ y $\alpha \in K \Leftrightarrow u \in U$ y $u \in W$ y $\alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U$ y $\alpha u \in W \Leftrightarrow \alpha u \in U \cap W$.

Por otra parte, si $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, como $(1, 0) \in U$, $(0, 1) \in W$ y $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W$, se tiene que $U \cup W$ no es un subespacio de V. □

3.2. Sistema de generadores. Independencia lineal

Definición. Sea S un subconjunto no vacío de V. Una *combinación lineal* de elementos de S es un vector de V de la forma $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $v_1, \ldots, v_n \in S$.

Ejemplos 3.7.

1. En $\mathbb{R}^2$ el vector $(3, 7)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 1), (1, 0)$ y $(0, 5)$ ya que $(3, 7) = 2(1, 1) + 1(1, 0) + 1(0, 5) = 7(1, 1) - 4(1, 0)$.

En este ejemplo, se observa que la forma de expresar un vector como combinación lineal de un conjunto de generadores no es única.

2. El vector $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$. En efecto,

$$(1, 1, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \alpha & & +\gamma & = 1 \\ \alpha & +\beta & & = 1 \\ & \beta & +\gamma & = 1 \end{array} \right.$$

Aplicando el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

obtenemos que la única solución del sistema es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y que

$$(1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1).$$

Definición 3.8. Sea S un subconjunto no vacío de V. Se dice que S es un *conjunto de generadores* de V si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de elementos de S.

Proposición 3.9. *Si S es un subconjunto no vacío de V, el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de S, $\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $v_1, \ldots, v_n \in S\}$, es un subespacio de V llamado subespacio generado por S, y se denota por $\langle S \rangle$. Además, $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.*

Por convenio se tiene que $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$.

Si $V = \langle S \rangle$, entonces S es un conjunto de generadores de V.

Notación 3.10. Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, usaremos la notación $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ en lugar de $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$.

Ejemplo 3.11. Si $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ se tiene que:

$$U = \{x(1,1,0) + z(0,0,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle.$$

Observación 3.12. Si S y S' son subconjuntos no vacíos de V

$$\langle S \rangle = \langle S' \rangle \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \\ \text{y} \\ \langle S' \rangle \subset \langle S \rangle \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} S \subset \langle S' \rangle \\ \text{y} \\ S' \subset \langle S \rangle \end{array} \right.$$

En particular, si $S \subset V$ y $v \in V$ se verifica que:

$$\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S \rangle.$$

Como consecuencia, en un conjunto de generadores S se puede eliminar un vector v si, y solo si, v es combinación lineal de los demás elementos de S. Es decir, si $v \in S$ y $S \backslash \{v\}$ es no vacío,

$$\langle S \rangle = \langle S \backslash \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S \backslash \{v\} \rangle.$$

Lema 3.13. *Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Se verifica que:*

i) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rangle$.

ii) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_n \rangle$ *con* $\alpha \in K$ *y* $\alpha \neq 0$.

iii) $\langle v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i + \beta v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rangle$ *con* $\beta \in K$ *e* $i \neq j$.

Definición 3.14. Si U y W son subespacios de V, se define el *subespacio suma* de U y W como $U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ y } w \in W\}$.

Nótese que:

a) $U + W = \langle U \cup W \rangle$ y, por tanto, es el menor subespacio de V que contiene a U y a W.

b) Si $U = \langle S \rangle$ y $W = \langle S' \rangle$, entonces $U + W = \langle S \cup S' \rangle$.

Definición 3.15. Un subconjunto no vacío, S, de V se dice que es *linealmente independiente* si:

$$[\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \alpha_i \in K \text{ y } v_i \in S] \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, n,$$

es decir, la única combinación lineal de vectores de S que es igual a cero es la trivial.

En otro caso, se dice que S es *linealmente dependiente*, es decir, existe una combinación lineal de vectores de S igualada a cero con algún coeficiente distinto de cero.

Ejemplos 3.16.

1. El conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es linealmente independiente. En efecto:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & & & & & = 0 \\ & & 2\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

2. $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,7)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ linealmente independiente.

Observaciones 3.17.

1. Si $S = \{u\} \subset V$,

$$S \text{ es linealmente independiente} \Leftrightarrow u \neq 0,$$

ya que $\alpha u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ o $u = 0$.

2. Todo conjunto que contenga el vector 0 es linealmente dependiente.

3. El conjunto $S = \{u, v\} \subset V$ con $u \neq 0$ y $v \neq 0$, es linealmente dependiente si, y solo si, existe $\alpha \in K$ tal que $u = \alpha v$.

4. Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de V tales que $S_1 \subset S_2$.

a) S_1 linealmente dependiente $\Rightarrow S_2$ linealmente dependiente.

b) S_2 linealmente independiente $\Rightarrow S_1$ linealmente independiente.

5. Un subconjunto S de V con al menos dos elementos es linealmente dependiente si, y solo si, existe un $v \in S$ tal que $v \in \langle S \backslash \{v\} \rangle$.

Veamos ahora en que condiciones un conjunto linealmente independiente puede ser ampliado a otro que también lo sea.

Proposición 3.18. *Sean $S \neq \varnothing$ un subconjunto de V linealmente independiente y $v \in V$, $v \notin S$. Se verifica que:*

$$v \notin \langle S \rangle \Leftrightarrow S \cup \{v\} \text{ es linealmente independiente.}$$

Demostración.
"$\Rightarrow$" Sea $\alpha v + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ con $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $u_1, \ldots, u_n \in S$. Como $v \notin \langle S \rangle$ se tiene que $\alpha = 0$ y, como además S es linealmente independiente, $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.
"$\Leftarrow$" Trivial ya que si v perteneciese a $\langle S \rangle$, $S \cup \{v\}$ sería linealmente dependiente. □

Nótese que, como consecuencia de la proposición anterior, las filas no nulas de una matriz escalonada A de orden $m \times n$ son vectores linealmente independientes de K^n.

3.3. Bases y dimensión

Introducimos a continuación el concepto de base que es esencial en el estudio de los espacios vectoriales. Trataremos, únicamente, el caso de espacios vectoriales finitamente generados, aunque los resultados son válidos para espacios vectoriales generales.

Definición 3.19. Un subconjunto ordenado, $\mathcal{B}$, de V es una *base* de V si:

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de V.

2. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Ejemplos 3.20.

1. El conjunto $\mathcal{C} = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$ es una base de K^n como K-espacio vectorial y se llama *base canónica*.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz no singular, tanto el subconjunto de K^n formado por las columnas de A, como el formado por las filas de A, son bases de K^n ya que cualquier sistema de la forma $AX = B$ o $A^t X = B$ tiene una única solución.

3. El conjunto $\{(1, 0, 3), (0, 1, 7), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y, sin embargo, el conjunto $\{(1, 0, 3), (0, 1, 7), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ no lo es puesto que es linealmente dependiente.

4. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base.

Definición 3.21. Se dice que V es *finitamente generado* si existe un subconjunto finito, S, de V tal que $\langle S \rangle = V$.

Teorema 3.22. *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un subconjunto de V. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}$ es una base de V.*

2. *Cualquier vector de V se escribe de modo único como combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$.*

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Por hipótesis $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. Además, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente ya que si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 = 0v_1 + \cdots + 0v_n$, de la hipótesis de unicidad, se sigue que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

1) $\Rightarrow$ 2) Siempre que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ o, equivalentemente, si $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$, teniendo en cuenta que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, se tiene que $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Definición 3.23. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ se llaman *coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$* a:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n.$$

Ejercicio 3.24. Determinar las coordenadas de $(2,3,5) \in \mathbb{R}^3$ y de $(1,3,6) \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{(0,1,3),(0,2,7),(2,3,5)\}$.

Demostración.

Ya que $(2,3,5) = 0(0,1,3) + 0(0,2,7) + 1(2,3,5)$ se tiene que las coordenadas del vector $(2,3,5)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(0,0,1)$.

Por otra parte,

$$(1,3,6) = \alpha(0,1,3) + \beta(0,2,7) + \gamma(2,3,5)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 3 \\ 3\alpha + 7\beta + 5\gamma = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rr} \alpha + 2\beta + 3\gamma = & 3 \\ \beta - 4\gamma = & -3 \\ \gamma = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2},\ \beta = -1,\ \alpha = \frac{7}{2}$$

es decir, las coordenadas del vector $(1,3,6)$ en la base $\mathcal{B}$ son $\left(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$. $\square$

Teorema 3.25 (Teorema de la existencia de base)**.** *Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial con un conjunto finito de generadores S. Existe un subconjunto, $\mathcal{B}$, de S que es una base de V.*

Demostración. Nótese que, ya que $V \neq \{0\}$, todo conjunto de generadores de V tiene al menos un vector distinto de 0.

Si S es linealmente independiente, ya es una base de V.

En caso contrario, existe $v \in S$ que es combinación lineal de los de $S \backslash \{v\}$ y $\langle S \rangle = \langle S \backslash \{v\} \rangle$.

Si este nuevo conjunto de generadores es linealmente independiente ya es una base de V. En otro caso, existe $v' \in S \backslash \{v\}$ tal que es combinación lineal de los vectores de $S \backslash \{v\}$ y $\langle S \backslash \{v\} \rangle = \langle S \backslash \{v, v'\} \rangle$.

Repitiendo el proceso, tantas veces como sea necesario, se llega a un sistema de generadores linealmente independiente ya que, en el caso mas desfavorable, encontraríamos un conjunto generador con un único vector que al ser distinto de 0 ya sería linealmente independiente. $\square$

Ejercicio 3.26. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por:

$$S = \{v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (0,1,0,0), v_3 = (-1,-1,0,0), v_4 = (1,2,0,0), v_5 = (0,2,3,3)\}.$$

Encontrar una base de U.

Demostración. Teniendo en cuenta que $\langle S\rangle \underset{v_3=-v_1}{=} \langle v_1, v_2, v_4, v_5\rangle \underset{v_4=v_1+v_2}{=} \langle v_1, v_2, v_5\rangle$ y que el conjunto $S' = \{v_1, v_2, v_5\}$ es linealmente independiente, se sigue que S' es una base de U. □

Acabamos de ver que un espacio vectorial finitamente generado y distinto de $\{0\}$ tiene una base finita. De hecho puede tener más de una base, por ejemplo, $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, 3)\}$ son bases distintas de $\mathbb{R}^2$.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que todas las bases de un espacio vectorial no nulo y finitamente generado tienen el mismo número de elementos.

Teorema 3.27. *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Todo subconjunto de V con más de n elementos es linealmente dependiente.*

Demostración. Sea $S= \{u_1, \ldots, u_m\} \subset V$ con $m > n$ y $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0$, con $\alpha_j \in K$ para $j = 1, \ldots, m$.

Como $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, cada u_j es combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$, es decir, para cada $j = 1, \ldots, m$ existen $c_{ij} \in K$ tales que $u_j = c_{1j} v_1 + \cdots + c_{nj} v_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1(c_{11}v_1 + \cdots + c_{n1}v_n) + \cdots + \alpha_m(c_{1m}v_1 + \cdots + c_{nm}v_n) \\ &= (\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \cdots + \alpha_m c_{1m})v_1 + \cdots + (\alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + \cdots + \alpha_m c_{nm})v_n \end{aligned}$$

y, como $\mathcal{B}$ es base, se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \cdots + \alpha_m c_{1m} = 0 \\ \cdots \\ \alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + \cdots + \alpha_m c_{nm} = 0 \end{array} \right.$$

Este sistema es homogéneo, por tanto, compatible y, como el número de incógnitas, m, es mayor que el de ecuaciones, n, tiene solución no trivial y, en consecuencia, S es linealmente dependiente. □

Teorema 3.28. *Si V tiene una base con n elementos, toda base de V tiene también n elementos.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V.

En primer lugar, hacemos notar que $\mathcal{B}'$ es un conjunto finito; en caso contrario, cualquier subconjunto de $\mathcal{B}'$ con más de n elementos sería linealmente dependiente, en contradicción con la definición de base.

Si $\mathcal{B}'= \{u_1, \ldots, u_m\}$, teniendo en cuenta que $\mathcal{B}$ es base y $\mathcal{B}'$ linealmente independiente, se tiene que $m \leq n$ y también, puesto que $\mathcal{B}'$ es base y $\mathcal{B}$ un conjunto linealmente independiente, se obtiene que $n \leq m$. □

Definición 3.29. Si V es un espacio vectorial finitamente generado y $V \neq \{0\}$, al número de elementos de cualquiera de sus bases se le llama *dimensión* de V, y escribiremos $\dim_K(V)$ o $\dim(V)$. Por convenio se admite que $\dim\{0\} = 0$.

Ejemplos 3.30.

1. $\dim_K(K) = 1$ y $\dim_K(K^n) = n$.

2. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$.

3. $W = \{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, -1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ con $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

4. Veamos un ejemplo de un subespacio, W, de $\mathbb{R}^4$ con $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

$$\begin{aligned} W =& \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0, y + 2t = 0\} \\ =& \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z + t, y = -2t\right\} = \{(z + t, -2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{z(1, 0, 1, 0) + t(1, -2, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1, 0), (1, -2, 0, 1)\rangle . \end{aligned}$$

Teorema 3.31. *Si V es un espacio vectorial y $\dim(V) = n \neq 0$. Se verifica:*

1. *Si S es un subconjunto de V linealmente independiente con n elementos, entonces S es una base de V.*

2. *Si S es un conjunto de generadores de V con n elementos, entonces S es una base de V.*

Demostración.
1) Veamos que $V = \langle S\rangle$. En efecto:

Dado $v \in V$, si $v \notin \langle S\rangle$, sabemos que $S \cup \{v\}$ es un conjunto linealmente independiente con $n + 1$ elementos, en contradicción con el teorema visto antes.

2) Si S es linealmente dependiente hemos probado, en el teorema de existencia de base 3.25, que existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S de m elementos que es una base con $m < n$, lo que contradice que $\dim(V) = n$. □

Teorema 3.32. *Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si $S = \{u_1, \ldots, u_s\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente, entonces $s \leq n$ y existen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-s}} \in \mathcal{B}$ tales que el conjunto $\{u_1, \ldots, u_s, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-s}}\}$ es una base de V. En particular, todo subconjunto de V linealmente independiente se puede ampliar a una base de V.*

Demostración. Sabemos que todo conjunto con más de n elementos es linealmente dependiente y, por tanto, $s \leq n$.

Si $s < n$, S no puede ser base y $\langle u_1, \ldots, u_s\rangle \subsetneq \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$. Así, existirá $v_{i_1} \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $v_{i_1} \notin \langle u_1, \ldots, u_s\rangle$ y $\{u_1, \ldots, u_s, v_{i_1}\}$ es un conjunto linealmente independiente con $s+1$ elementos. Repitiendo el proceso $n-s$ veces se tiene el resultado. □

Ejemplo 3.33. Sea $S=\{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 3, 4)\} \subset \mathbb{R}^4$. Veamos como se puede ampliar S a una base de $\mathbb{R}^4$.

Por una parte, sabemos que $\langle u_1, u_2\rangle \underset{u_2-u_1}{=} \langle (1, 1, 1, 1),(0, 1, 2, 3)\rangle$.

Además, $S'=\{(1, 1, 1, 1),(0, 1, 2, 3),(0, 0, 1, 0),(0, 0, 0, 1)\}$ es un conjunto de 4 vectores escalonados no nulos y, por tanto, linealmente independientes. Así, $\mathbb{R}^4 = \langle S'\rangle$. Como

$$\langle S'\rangle = \langle (1, 1, 1, 1),(1, 2, 3, 4),(0, 0, 1, 0),(0, 0, 0, 1)\rangle,$$

se obtiene que $\{(1, 1, 1, 1),(1, 2, 3, 4),(0, 0, 1, 0),(0, 0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

Proposición 3.34. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n y U un subespacio de V. Se verifica que:*

1. $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2. $\dim(U) = \dim(V) \Leftrightarrow U = V$.

Demostración. **1)** Suponemos conocido que todo espacio vectorial tiene una base. Si U es un subespacio de V, todo subconjunto de U linealmente independiente tendrá a lo sumo n vectores porque $\dim(V) = n$ y, en consecuencia, $\dim(U) \leq n$.

(Otra demostración). Si $U = \{0\}$ es trivial. En otro caso, existe $u_1 \in U$, $u_1 \neq 0$ y el conjunto $\{u_1\}$ es linealmente independiente. Si este conjunto generase U ya estaría. En caso contrario, existirá algún $u_2 \in U$, $u_2 \notin \langle u_1\rangle$ y el conjunto $\{u_1, u_2\} \subset U$ será de nuevo linealmente independiente. Repitiendo el proceso y teniendo en cuenta que en V no hay subconjuntos independientes de más de n elementos, encontraremos una base de U con a lo sumo n elementos.

2) Si $\dim(U) = \dim(V) = n$, entonces U tiene una base de n elementos. Como sabemos que todo subconjunto de V linealmente independiente y con n elementos es base, se obtiene que $U = V$ y la base de U lo es también de V. □

Proposición 3.35 (Fórmula de Grassmann)**.** *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n y U, W subespacios de V. Entonces,*

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Demostración. Sean $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ una base de U y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de W.

Sabemos que si $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{v_1, \ldots, v_t\}$ es una base de $U \cap W$, entonces se tiene que $0 \leq t \leq \min\{r, s\}$ y, como $\mathcal{B}_{U\cap W}$ es un subconjunto linealmente independiente tanto de U como de W, existen $u_{i_1}, \ldots, u_{i_{s-t}}$ elementos de U y $w_{i_1}, \ldots, w_{i_{r-t}}$ elementos de W de modo que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_t, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{s-t}}\}$ es una base de U y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_t, w_{i_1}, \ldots, w_{i_{r-t}}\}$ es una base de W.

Como
$$U+W=\left\langle v_1,\dots,v_t,u_{i_1},\dots,u_{i_{s-t}},w_{i_1},\dots,w_{i_{r-t}}\right\rangle,$$
para obtener el resultado, es suficiente comprobar que el conjunto
$$\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_t,u_{i_1},\dots,u_{i_{s-t}},w_{i_1},\dots,w_{i_{r-t}}\}$$
es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de $U+W$. □

3.4. Rango de una matriz

Vamos a demostrar que el espacio vectorial generado por las filas de una matriz tiene la misma dimensión que el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz y esto nos permitirá definir el rango de la matriz.

Si $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se tiene que $\langle F_1(A),\dots,F_m(A)\rangle$ es un subespacio de K^n y $\langle C_1(A),\dots,C_n(A)\rangle$ es un subespacio de $\mathcal{M}_{m\times 1}(K)$.

Proposición 3.36. *Si $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas, entonces*
$$\langle F_1(A),\dots,F_m(A)\rangle=\langle F_1(B),\dots,F_m(B)\rangle.$$

Demostración. Como demuestra el lema 3.13, cada operación elemental que se hace en las filas de una matriz deja invariante el subespacio vectorial de K^n generado por sus filas. □

Corolario 3.37. *Si $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se tiene que:*
$$r_f(A)=\dim(\langle F_1(A),\dots,F_m(A)\rangle).$$

Demostración. Toda matriz, A, es equivalentes por filas a una matriz escalonada, B.

Por definición, $r_f(A)$ es el número de pivotes de B, es decir, la dimensión del espacio $\langle F_1(B),\dots,F_m(B)\rangle$ y, por la proposición 3.36, $\dim(\langle F_1(A),\dots,F_m(A)\rangle)$. □

Corolario 3.38. *Si $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas, entonces*
$$r_f(A)=r_f(B).$$

Definición 3.39. Si $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se define *rango por columnas de A*, y se denota por $r_c(A)$, como $\dim(\langle C_1(A),\dots,C_n(A)\rangle)$.

Nótese que si $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por columnas, entonces $r_c(A)=r_c(B)$.

Proposición 3.40. *Si $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es una matriz escalonada reducida con s pivotes, entonces*

$$r_f(B) = s = r_c(B).$$

Demostración. Si B es una matriz escalonada reducida, B es equivalente por columnas a una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_s & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$$

Es claro que las $n - s$ últimas columnas son combinación lineal de las s primeras y, como estas son linealmente independientes y las columnas de esta matriz generan el mismo espacio que las de B, se tiene que $r_f(B) = s = r_c(B)$. □

Proposición 3.41. *Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas, entonces*

$$r_c(A) = r_c(B).$$

Demostración. Puesto que, al ser A y B matrices equivalentes por filas, los sistemas $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones, se tiene que:

$\alpha_1 C_1(A) + \cdots + \alpha_n C_n(A) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es solución de $AX = 0$
$\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es solución de $BX = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 C_1(B) + \cdots + \alpha_n C_n(B) = 0$.

Es decir, las columnas de A y de B verifican las mismas condiciones de dependencia lineal y, como consecuencia, $r_c(A) = r_c(B)$. □

Corolario 3.42. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces*

$$r_f(A) = r_c(A).$$

Demostración. Sabemos que A es equivalente por filas a una matriz B escalonada reducida. Entonces,

$$r_f(A) = r_f(B) = \text{ número de pivotes de } B = r_c(B) = r_c(A).$$ □

Definición 3.43. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se define *rango de* A como el rango por filas de A o el rango por columnas de A y se denotará por $r(A)$.

Proposición 3.44. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$, entonces*

$$r(A) = n \textit{ si, y solo si, } \det(A) \neq 0.$$

Demostración. $r(A) = n \Leftrightarrow r_f(A) = n \Leftrightarrow A$ es equivalente por filas a $I_n \Leftrightarrow A$ es no singular $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Otra demostración.

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ es no singular $\Leftrightarrow$ El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ La única relación de dependencia lineal entre las columnas de A es la trivial $\Leftrightarrow \{C_1(A), \ldots, C_n(A)\}$ es un conjunto linealmente independiente $\Leftrightarrow r(A) = n$. □

Otro método para el cálculo del rango

Vamos a dar un método para calcular el rango de una matriz en el que no se utilizan transformaciones elementales.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Llamaremos un *menor de orden* p de la matriz A al determinante de una submatriz de orden p de A. Es decir, $\det(A_p)$, en donde

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{pmatrix}$$

siendo $i_1, \dots, i_p$ las filas y $j_1, \dots, j_p$ las columnas de A no suprimidas.

Algoritmo del cálculo del rango:

Se toma un menor de orden p no nulo, $\Delta_p = \det(A_p) \neq 0$, se forman todos los menores de orden $p+1$ que resultan de orlar A_p con una fila fija $F_i(A)$, siendo $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, y con cualquiera de las restantes columnas. Si todos estos menores son nulos se suprime la fila $F_i(A)$ y se procede con otra hasta que:

1) Se encuentre un menor de orden $p+1$ no nulo con el que repetiríamos el proceso, o

2) Todos los menores de orden $p+1$ son nulos, con lo que el rango de A sería p.

Explicación:

A tiene un menor de orden p no nulo, $\Delta_p = \det(A_p) \neq 0$, si, y solo si, las p columnas de A_p son linealmente independientes. En este caso la matriz formada por las filas $i_1, \dots, i_p$ de A (respectivamente la matriz formada por las columnas $j_1, \dots, j_p$ de A) tiene rango p ya que tiene p columnas (respectivamente p filas) linealmente independientes y su número de filas (respectivamente columnas) es p. Por tanto $r(A) = r_f(A) \geq p$.

Si $r(A) > p$, como las filas $i_1, \dots, i_p$ de A son linealmente independientes existirá un $k \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ de modo que $\{F_{i_1}(A), \dots, F_{i_p}(A), F_k(A)\}$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces,

$$r\begin{pmatrix} F_{i_1}(A) \\ \dots \\ F_{i_p}(A) \\ F_k(A) \end{pmatrix} = p+1$$

Como en la matriz anterior, que es de rango $p+1$, las columnas $j_1, \dots, j_p$ son linealmente independientes existirá un $s \notin \{j_1, \dots, j_p\}$ tal que las columnas $j_1, \dots, j_p, s$ sean linealmente independientes. Así, la matriz obtenida orlando A_p con la fila k y la columna s, es de orden $p+1$ y de determinante distinto de cero. Es decir, existe un menor de orden $p+1$ no nulo obtenido orlando A_p.

3.5. Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 3.45. *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales. Se verifica que:*

1. *El sistema es compatible si, y solo si, $r(A) = r(A|B)$.*

2. *Si el sistema es compatible y $r(A) = r(A|B) = r \leq n$, se tiene que es compatible determinado si, y solo si, $r = n$.*

Demostración.

1) Como, $AX = B \Leftrightarrow C_1(A)x_1 + \cdots + C_n(A)x_n = B$, se tiene que:

$AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow B \in \langle C_1(A), \ldots, C_n(A)\rangle$

$\Leftrightarrow \langle C_1(A), \ldots, C_n(A)\rangle = \langle B, C_1(A), \ldots, C_n(A)\rangle$

$\Leftrightarrow r(A) = \dim \langle C_1(A), \ldots, C_n(A)\rangle = \dim \langle B, C_1(A), \ldots, C_n(A)\rangle = r(A|B)$.

2) Si $r(A) = r(A|B) = r < n$, entonces el conjunto $\{C_1(A), \ldots, C_n(A)\}$ es linealmente dependiente, es decir, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no todos cero tales que $\alpha_1 C_1(A) + \cdots + \alpha_n C_n(A) = (0)$, es decir, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es una solución no trivial del sistema homogéneo $AX = (0)$. Es inmediato comprobar que si $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es una solución de $AX = B$ también lo es $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ y, por tanto, el sistema tiene más de una solución.

Recíprocamente, si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ son dos soluciones distintas del sistema $AX = B$, tenemos que $(\alpha_1 - \beta_1)\, C_1(A) + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)C_n(A) = (0)$ y, ya que existe algún i para el cual $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, se sigue que el conjunto $\{C_1(A), \ldots, C_n(A)\}$ es linealmente dependiente y $r(A) < n$. □

Corolario 3.46. *Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales compatible. Si α es una solución del sistema, entonces β es una solución del sistema si, y solo si, $\alpha - \beta$ es solución del sistema homogéneo $AX = 0$.*

3.6. Ecuaciones de un subespacio

Sean U un subespacio de K^n, $\mathcal{B} = \{\, (a_{11}, \ldots, a_{1n})\,, \ldots, (a_{s1}, \ldots, a_{sn})\}$ una base de U y $u = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$.

$u = (x_1, \ldots, x_n) \in U \Leftrightarrow \{\, (a_{11}, \ldots, a_{1n})\,, \ldots, (a_{s1}, \ldots, a_{sn})\,, (x_1, \ldots, x_n)\}$ es un conjunto linealmente dependiente $\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = s \Leftrightarrow$ Escogido un menor no nulo de orden s de la matriz $A = (a_{ij})$, $\det(A_s) \neq 0$ y los determinantes de las matrices de orden $s+1$ obtenidas orlando A_s son todos cero.

Ejercicios 3.47. Calcular las ecuaciones de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

1. $U = \langle (1,2,3,4), (0,1,2,0), (0,1,1,1) \rangle$

2. $W = \langle (1,1,1,0), (0,1,1,1) \rangle$

Demostración.

1. $(x,y,z,t) \in U \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + z + t = 0.$

2. $W = \langle (1,1,1,0), (0,1,1,1) \rangle$

$$(x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

o bien, como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 - xF_1 \\ F_3-(y-x)F_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-y & t-y+x \end{pmatrix} \text{ se tiene,}$$

$$r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-y & t-y+x \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

□

3.7. Ejercicios

1.- Probar que el grupo abeliano $(\mathbb{R}^2, +)$ no admite estructura de espacio vectorial para las siguientes multiplicaciones por escalares:

a) $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y^2)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\alpha(x,y) = (\alpha y, \alpha x)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\alpha(x,y) = (0, \alpha y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.- Sea V un K-espacio vectorial, $\alpha \in K$ y $v \in V$. Probar que

$$(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v).$$

3.- Determinar cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ son subespacios:

a) $U_1 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b=0, c-d=0\}$.

b) $U_2 = \{(a+2b, 0, 2a, a+b)) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

c) $U_3 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2 > 0\}$.

d) $U_4 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a=1\}$.

e) $U_5 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2 = 0\}$.

f) $U_6 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2 = 7\}$.

h) $U_7 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c \in \mathbb{Z}\}$.

4.- Sea $S = \{(1,1,0),(0,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$. ¿Alguno de los vectores $u=(3,5,4)$, $v=(2,4,7)$ pertenece al subespacio $\langle S \rangle$?

5.- Sean $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y-3z=0\}$ y $u=(3+\beta, 6, 1+\alpha)$, $v=(1-\beta, 2, 3+2\alpha)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿Para qué valores de α y β se tiene que $u,v \in F$?

7.- Determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se verifica que:

a) $(1,-1,a) \in \langle (1,1,1),(0,1,2) \rangle$.

b) $(1,0,-6) \in \langle (1,1,1),(1,2,a+1) \rangle$.

c) $(0,2,a)$ es combinación lineal de los vectores $(4,0,5)$ y $(2,a,3)$.

8.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b-2c=0\right\} \text{ y } U_2 = \langle (1,1,1) \rangle .$$

Demostrar que $U_2 \subsetneq U_1$.

9.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-b-3c=0\} \text{ y } U_2 = \langle (2,2,0),(4,1,1) \rangle$$

Demostrar que $U_1 = U_2$.

10.- Sean V un K-espacio vectorial y $v_1, v_2, v_3 \in V$ tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, con $\alpha_2\alpha_3 \neq 0$. Probar que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle$.

11.- Sean $K = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ el cuerpo de 2 elementos y U un subconjunto no vacío de K^n. Probar que:

$$U \text{ es subespacio vectorial de } K^n \Leftrightarrow u+v \in U,\ \forall u,v \in U.$$

12.- Probar que el espacio vectorial $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b-c=0\}$ está generado por los vectores $u_1 = (1,0,1)$ y $u_2 = (0,1,2)$ y que también está generado por los vectores $v_1 = (2,-1,0)$ y $v_2 = (-1,1,1)$.

13.- Comprobar que los vectores de $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,0,-2,5)$, $u_2 = (2,1,-1,4)$ y $u_3 = (-1,2,0,2)$, son linealmente independientes.

14.- Hallar c y $d \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1,1,c,d)$ pertenezca al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,2,-1,2)$, $(1,3,0,2)$ y $(0,1,0,1)$.

15.- Se consideran, los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$G = \langle (3,0,2,2),(0,0,0,5)\rangle \text{ y}$$
$$F = \langle (1,0,1,-1),(1,2,3,1),(0,1,1,1),(2,4,6,3),(1,0,1,0)\rangle.$$

Hallar un conjunto de vectores escalonados que también genere F y probar que $G \subsetneq F$.

16.- Sean u, v y w tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^5$. Demostrar que los vectores $u+v, u-v$ y $u-2v+w$ también son linealmente independientes.

17.- Sean V un K-espacio vectorial y $\{u_1,\ldots,u_4\}$ un conjunto de vectores de V linealmente independiente. Probar que el conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_4\}$, en donde $v_1 = u_1, v_2 = u_1-u_2, v_3 = u_1-u_2-u_3, v_4 = u_1-u_2-u_3-u_4$, es linealmente independiente.

18.- Calcular para que valores de a son linealmente independientes los vectores:

a) $(1,a,0,-1),(1,a,a-2,a-3),(0,1,2a-2,a) \in \mathbb{R}^4$.

b) $(1,1,1),(1,1+a^2,1+a),(1,1+a^2,2a) \in \mathbb{R}^3$.

19.- Sean V un K-espacio vectorial y $u,v,w \in V$. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $u \in \langle v,w\rangle$, entonces u y w son linealmente dependientes.

b) $\langle u,v,w\rangle = \langle u,u+v,u+w\rangle$.

c) Si $u \notin \langle v,w\rangle$, entonces u y w son linealmente independientes.

d) Si $u \notin \langle v,w\rangle$, entonces u,v y w son linealmente independientes.

e) Los vectores $u-v, v-w$ y $w-u$ son linealmente dependientes.

f) Si $w = u + v$, entonces $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$.

g) Si u, v, w son linealmente dependientes, entonces u, v también son linealmente dependientes.

h) Si u y v son linealmente independientes, $w \notin \langle u\rangle$ y $w \notin \langle v\rangle$, entonces u, v y w son linealmente independientes.

i) Si u y v son linealmente independientes, entonces $u + v$ y $u - v$ son linealmente independientes.

j) Si u y v son linealmente independientes, la ecuación $\alpha u + \beta v + \gamma(u + v) = 0$ solo tiene la solución $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

k) Se verifica que $\dim \langle u, v\rangle = \dim \langle u\rangle + \dim \langle v\rangle$.

l) Si u y v son linealmente independientes y $\alpha \in K \setminus \{0\}$, entonces αu y v son linealmente independientes.

20.- Sean u, v y w tres vectores linealmente independientes de un K-espacio vectorial. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?

a) Los vectores $u - v, v - w$ y $w - u$ son linealmente independientes.

b) Los vectores $u, u + v$ y $u + w$ son linealmente independientes.

c) Los vectores $u + v, v + w$ y $u + w$ son linealmente independientes.

d) $\dim \langle u, v\rangle = 2$.

21.- Sea V un K-espacio vectorial y sean $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4 son linealmente independientes.

b) Los vectores $u_1 + u_4, u_2 + u_4, u_3 + u_4$ y u_4 son linealmente independientes.

22.- Hallar una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

a) $U_1 = \{(a, 2a, 4a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) $U_2 = \{(a + 2b, -a + b, -a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

c) $U_3 = \{(a, b, c) \mid a + b - c = 0\}$.

d) $\langle (1, 1, -2), (2, -1, 1), (3, -3, 4), (4, -5, 7)\rangle$.

23.- Encontrar una base para los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0, y + z = 0\}$.

b) $\langle (1, 2, 11, -4), (1, 2, 5, 0), (1, 4, 2, 2) \rangle$.

c) $\langle (1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1) \rangle \cap \langle (1, 0, 1, 0), (4, -1, 2, 1) \rangle$.

24.- Probar que $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (1, 2, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Calcular, en esta base, las coordenadas de los vectores de la base canónica.

25.- Demostrar que los vectores $(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1, 1)$ son una base de $\mathbb{R}^4$ y calcular las coordenadas de $(1, 1, 1, 0)$ y de $(5, 3, 6, 1)$ en dicha base.

26.- Sabiendo que un vector $u \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas $(1, \beta)$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 2), (4, -1)\}$ y coordenadas $(6, \alpha)$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$, calcular α y β.

27.- Sea $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 2, 0)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^4$. Encontrar una base de $\langle S \rangle$, ampliarla a una base de $\mathbb{R}^4$ y calcular las coordenadas de $(1, 1, 1, 1)$ en dicha base.

28.- Escribir una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y explicar por qué los siguientes conjuntos no son base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

a) $\{1, 2x, x^2 - 1, 5x\}$.

b) $\{1 - x, 1 - x^2, 3x^2 - 2x - 1\}$.

29.- Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un K-espacio vectorial V. Probar que el conjunto $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es base de V.

30.- Sea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0, y + z = 0\}$. Hallar una base para U y ampliarla a una base de $\mathbb{R}^4$.

31.- ¿Para que valores de α los vectores $(\alpha, 0, 1, -\alpha), (\alpha, 1, 2, 1)$ y $(1, 0, \alpha, \alpha)$ generan un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2?

32.- Calcular, en función de $a \in \mathbb{R}$, la dimensión y una base de los siguientes subespacios:

a) $U_1 = \langle (1, a, 0, -a), (0, 1, 1, a), (-1, 0, a, 0), (2, a + 1, -a + 1, 0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

b) $U_2 = \langle (1 + a, 1 + a, 2), (1, a, 1), (0, 1 - a, a - 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

33.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$U = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle \text{ y } W = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle.$$

Calcular una base, la dimensión y las ecuaciones de los siguientes subespacios: U, W, $W \cap U$ y $W + U$.

34.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U_a = \langle (1,2,1), (1,2,a+2), (3,6,a+4) \rangle \text{ y}$$
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}.$$

a) Determinar, en función de los valores del parámetro a, la dimensión y unas ecuaciones del subespacio U_a.

b) Calcular una base de W y ampliarla a una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Para $a = 0$, calcular una base de $U_0 \cap W$ y otra de $U_0 + W$.

35.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,1,1,1), (0,2,1,1) \rangle \text{ y } W = \langle (0,2,1,a+2), (1,1,0,1) \rangle.$$

a) Calcular unas ecuaciones implícitas para U.

b) ¿ Para que valores de a la dimensión de $U + W$ es 3?

c) ¿ Para que valores de a se tiene que $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$?

36.- Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(a,b,c,d) \mid b + c + d = 0\} \text{ y } W = \{(a,b,c,d) \mid a + b = 0, c = 2d\}.$$

Calcular sus dimensiones y dar una base para cada uno de los siguientes subespacios: U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

37.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(a,b,c) \mid a - b - c = 0\} \text{ y } W = \{(a,0,c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}.$$

Dar una base para cada uno de los siguientes subespacios: U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

38.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - t = 0, y - 2z = 0\right\} \text{ y}$$
$$W = < (0,0,1,1), (1,0,1,2), (2,0,3,5) >.$$

a) Encontrar una base para cada uno de los subespacios siguientes: U, W y $U + W$.

b) Probar que $\langle (1,0,0,1) \rangle \subset U \cap W$.

39.- Encontrar unas ecuaciones implícitas para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que tiene por base $\{(2,1,1),(1,1,2)\}$.

40.- Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (2,0,0,1),(1,1,0,3)\rangle.$$

41.- Hallar una base y unas ecuaciones implícitas para el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por los vectores $(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0)$ y $(1,1,1,0,0)$.

42.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} \text{ y } U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y-z=0\}.$$

a) Calcular una base para U_1.

b) ¿Es $U_1 \cup U_2$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

c) Probar que $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$.

43.- Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) \mid x+y+3z-2t=0\} \text{ y}$$
$$W = \langle (1,1,0,1),(2,2,-1,2),(3,4,0,2),(2,3,-1,1)\rangle.$$

Calcular bases para U y W. Ampliar la base obtenida para U a una base de $\mathbb{R}^4$. Encontrar unas ecuaciones implícitas para W y calcular una base para $U \cap W$.

44.- Calcular una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$\langle (2,1,-1),(1,2,2)\rangle \cap \langle (-1,0,1),(3,1,1)\rangle.$$

45.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \langle (1,-2,0,a),(0,1,2,5)\rangle \text{ y } G = \langle (-1,3,1,1),(0,2,5,2)\rangle.$$

a) ¿Para que valores de a se tiene que $\dim(F+G)=3$?

b) Determinar para que valores de a se tiene que $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$.

46.- Sean α y β números reales distintos de cero. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1,0,1,0),(-\alpha,0,0,0)\rangle \text{ y } W = \langle (0,1,0,1),(0,1/\alpha,-\alpha,1/\beta)\rangle.$$

a) Calcular, en función de los valores de α y β, la dimensión del espacio vectorial $U+W$.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas de U.

c) Calcular para que valores de α y β se tiene que $U \cap W \neq \{(0,0,0,0)\}$.

d) Para $\alpha = \beta = -1$, probar que $(5,2,3,2) \in U + W$.

47.- Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 3z - 2t = 0\right\} \text{ y}$$
$$G = \langle (1,1,0,1), (2,2,-1,2), (3,4,0,2), (2,3,-1,1) \rangle.$$

Calcular bases para F y G. Ampliar la base obtenida para F a una base de $\mathbb{R}^4$. Encontrar unas ecuaciones implícitas para G y calcular una base para $F \cap G$.

48.- Encontrar los valores de a y b en $\mathbb{R}$ para que sean linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$ los vectores $(3,2,a,5), (2,-3,5,a)$ y $(0,13,b,7)$.

49.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$U = \{(x,y,z,t) \mid x = y\} \text{ y } W = \{(x,y,z,t) \mid z = t\}.$$

Razonar, dando una demostración o un contraejemplo, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

b) $U \cap W = \langle (1,1,1,1) \rangle$.

c) Si $v \notin U$, entonces $\mathbb{R}^4 = U + \langle v \rangle$.

50.- Razonar la verdad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Si S_1 y S_2 son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^3$ tales que $S_1 \subset S_2$ y S_1 es linealmente independiente, entonces también lo es S_2.

b) Si S_1 y S_2 son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^3$ tal que $S_1 \subset S_2$ y S_1 es linealmente dependiente, entonces también lo es S_2.

c) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ $\{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ tiene dimensión 3.

d) Si $\{u,v,w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y t es un vector no cero de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{u+t, v, w\}$ también es base de $\mathbb{R}^3$.

e) Si U_1 y U_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$ tal que $\dim(U_1) \leq \dim(U_2)$, entonces $U_1 \subset U_2$.

f) Si $u \in \langle v, w \rangle \subset \mathbb{R}^3$, entonces u y v son linealmente dependientes.

g) Si $(x,y,z) \in \langle (0,0,1), (2,0,1) \rangle$, entonces $y = 0$ y $z = 1$.

h) La dimensión del subespacio $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$ es 1.

i) Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces cualquier subconjunto de S no vacío es linealmente independiente.

j) Para cualesquiera vectores v, u y w de un espacio vectorial, los vectores $u - v$, $v - w$ y $w - u$ son linealmente dependientes.

k) Todos los subconjuntos de $S = \{(1,0), (1,1), (0,1)\}$ con dos elementos son base de $\mathbb{R}^2$.

51.- Sea V un K-espacio vectorial. Razonar, dando una demostración o un contraejemplo, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) Si $u, v, w \in V$, entonces $\langle u, v\rangle \cap \langle u, w\rangle = \langle u\rangle$.

b) Si $u, v, w, t \in V$ son linealmente independientes, entonces se tiene que $\langle u, v\rangle \cap \langle w, t\rangle = \{0\}$.

c) Si $u, v, w \in V$ son linealmente independientes y $t \notin \{u, v, w\}$, entonces $\{u, v, w, t\}$ es linealmente independiente.

52.- Sea $U = \langle (1,1,0,a), (3,-1,b,-1), (-3,5,0,a)\rangle$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

a) Hallar a y b para que $\dim(U) = 2$.

b) Para los valores anteriores de a y b, hallar unas ecuaciones implícitas de U y encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}^4$ tal que $U \subsetneq W \subsetneq \mathbb{R}^4$.

53.- Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1,-2,0,a), (0,1,2,5)\rangle \text{ y } W = \langle (-1,3,1,1), (0,2,5,2)\rangle.$$

a) ¿Para que valores de a se tiene que $\dim(U + W) = 3$?

b) Determinar para que valores de a se tiene que $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$.

54.- En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$U = \langle (1,-1,1,0), (0,1,-1,1), (1,0,0,-1), (3,-1,1,-2)\rangle \text{ y}$$
$$W = \langle (1,0,0,0), (1,-2,2,0), (0,1,-1,1)\rangle.$$

a) Calcular unas ecuaciones implícitas para U.

b) Demostrar que $(0,1,0,0) \notin U$ y que $U + \langle (0,1,0,0)\rangle = \mathbb{R}^4$.

c) Probar que $U = W$.

d) Justificar que $v = (\sqrt{3}, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}, 0) \in U$ y encontrar $v', v'' \in U$ de modo que $\{v, v', v''\}$ sea una base de U.

55.- Sea $U = \langle u, v, w \rangle \subset \mathbb{R}^4$ tal que $\dim(U) = 3$. Razonar, dando una demostración o un contraejemplo, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) $\langle u, v \rangle \cap \langle u+v+w \rangle = \{0\}$.

b) $\langle u, v \rangle + \langle u+v+w \rangle = U$.

c) Si $t \notin U$, entonces $\{u, v, w, t\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

d) $\langle u+v \rangle \subsetneq \langle u, v \rangle$.

56.- Sean U y W subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(U) = 2$ y $\dim(W) = 5$. Razonar, dando una demostración o un contraejemplo, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) $U + W = \mathbb{R}^6 \Leftrightarrow U$ no está contenido en W.

b) $U \subset W$.

c) $U \cap W = \{0\}$.

Capítulo 4

Aplicaciones lineales

Definición 4.1. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Se dice que la aplicación $f\colon V \to W$ es *una aplicación lineal* si verifica:

1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$,

2. $f(\alpha v) = \alpha f(v)$,

para cualesquiera v, $v' \in V$ y $\alpha \in K$.

Ejemplos 4.2.

1. La aplicación $f\colon V \to K$, definida por $f(v) = 0$, es una aplicación lineal.

2. La aplicación identidad $id_V\colon V \to V$, definida por $id_V(v) = v$, es una aplicación lineal.

3. La aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y$, es una aplicación lineal.

4. La aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$, es una aplicación lineal.

5. La aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y) = (x+y, x-y, 1)$, no es una aplicación lineal.

Proposición 4.3. *Sea $f\colon V \to W$ una aplicación lineal. Se verifica que:*

1. $f(0) = 0$.

2. $f(-v) = -f(v)$, *para todo* $v \in V$.

3. $f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$, *para todo* $v_i \in V$ *y* $\alpha_i \in K$, *con* $i : 1, \ldots, n$.

4. *Si* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es un subconjunto de* V *linealmente dependiente, entonces el subconjunto,* $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$*, de* W *es un linealmente dependiente.*

Proposición 4.4. *Sean* $f\colon V \to W$ *y* $g\colon W \to U$ *aplicaciones lineales. La composición* $g \circ f\colon V \to U$ *es también lineal.*

Demostración.
1) $(g \circ f)(v + v') = g[f(v + v')] = g[f(v) + f(v')] = g[f(v)] + g[f(v')]$
$= (g \circ f)(v) + (g \circ f)(v'), \forall v, v' \in V$.

2) $(g \circ f)(\alpha v) = g[f(\alpha v)] = g[\alpha f(v)] = \alpha g[f(v)] = \alpha(g \circ f)(v), \forall v \in V$ y $\forall \alpha \in K$. □

Definición 4.5. Una aplicación lineal $f\colon V \to W$ se dice que es *un isomorfismo lineal* cuando es una aplicación biyectiva.

Proposición 4.6. *Si* $f\colon V \to W$ *es un isomorfismo lineal, entonces* $f^{-1}\colon W \to V$ *también lo es.*

Demostración. Como f es una aplicación biyectiva tiene inversa, $f^{-1}\colon W \to V$. Falta probar que f^{-1} también es lineal.

Para todo $w, w' \in W$ y $\alpha \in K$ se tiene que:

$f[f^{-1}(\alpha w)] = \alpha w = \alpha f[f^{-1}(w)] = f[\alpha f^{-1}(w)]$ y

$f[f^{-1}(w + w')] = w + w' = f[f^{-1}(w)] + f[f^{-1}(w')] = f[f^{-1}(w) + f^{-1}(w')]$.

Teniendo en cuenta el carácter inyectivo de f, se demuestra la linealidad de f^{-1}. □

Proposición 4.7. *Si* $f\colon V \to W$ *es una aplicación lineal, se verifica:*

1. *Si* U *es un subespacio de* V*, entonces* $f(U)$ *es un subespacio de* W*. En particular,* $\operatorname{Im} f$ *es un subespacio de* W*. Además, si* $U = \langle u_1, \ldots, u_s\rangle$*, entonces* $f(U) = \langle f(u_1), \ldots, f(u_s)\rangle$.

2. *Si* L *es un subespacio de* W*, entonces* $f^{-1}(L)$ *es un subespacio de* V*. En particular,* $f^{-1}(\{0\})$ *es un subespacio de* V *que se denotará por Núcleo de* f *o* $\operatorname{Ker} f$.

Demostración. **1)** Como $f(0) = 0 \in f(U)$, entonces $f(U) \neq \varnothing$. Además, para $u, u' \in U$ y $\alpha \in K$, se tiene que $f(u) + f(u') = f(u + u') \in f(U)$ y $\alpha f(u) = f(\alpha u) \in f(U)$.

2) Dado que $f(0) = 0 \in L$, $0 \in f^{-1}(L)$ y, para $w, w' \in f^{-1}(L)$ y $\alpha \in K$, se tiene que $f(w + w') = f(w) + f(w') \in L$ y $f(\alpha w) = \alpha f(w) \in L$. □

Ejercicio 4.8. Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y, x - z, x - z).$$

Calcular los siguientes subespacios:

a) El núcleo y la imagen de f.

b) $f^{-1} \langle (1, 1, 1),\ (0, 0, 1) \rangle$.

c) $f^{-1}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

Demostración. **a)** $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ x - z = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y = z\} = \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle$.

$\operatorname{Im} f = \langle f(1, 0, 0),\ f(0, 1, 0),\ f(0, 0, 1) \rangle$

$= \langle (1, 1, 1),\ (1, 0, 0),\ (0, -1, -1) \rangle \underset{(1,1,1)=(1,0,0)-(0,-1,-1)}{=} \langle (1, 0, 0),\ (0, -1, -1) \rangle$.

b) $f^{-1} \langle (1, 1, 1),\ (0, 0, 1) \rangle$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y, x - z, x - z) \in \langle (1, 1, 1),\ (0, 0, 1) \rangle\}$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{vmatrix} 1 & 0 & x + y \\ 1 & 0 & x - z \\ 1 & 1 & x - z \end{vmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}.$$

c) $f^{-1}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - (x - z) + x - z = 0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} = \langle (1, -1, 0),\ (0, 0, 1) \rangle$. □

Teorema 4.9. *Sean V y W espacios vectoriales, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $w_1, \dots, w_n \in W$.*

Existe una única aplicación lineal $f \colon V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Como las coordenadas de cada vector $v \in V$ respecto de una base $\mathcal{B}$ son únicas, si $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ se define $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$. De este modo, f es lineal y $f(v_i) = w_i$ para $i = 1, \dots, n$. La unicidad es inmediata. □

Proposición 4.10. *Sea $f \colon V \to W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.*

1. *f es inyectiva si, y solo si,* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ *si, y solo si, cualquier subconjunto de V linealmente independiente tiene como imagen un subconjunto de W linealmente independiente.*

2. *f es sobre si, y solo si, cualquier conjunto de generadores de V tiene como imagen un conjunto de generadores de W.*

3. *f es biyectiva si, y solo si, la imagen de una base de V es una base de W.*

Demostración. **1)** Si f es inyectiva, entonces $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0 = f(0)\} = \{0\}$.

Recíprocamente, $f(v) = f(v') \Leftrightarrow f(v - v') = 0 \Leftrightarrow v - v' \in \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow v = v'$.

Además, si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ es un conjunto de vectores linealmente independiente y $\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) = 0$, el carácter lineal de f indica que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$ pertenece a $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ y, por la independencia lineal de $\{v_1, \ldots, v_r\}$, se tiene que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ y, así, $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ es linealmente independiente.

Finalmente, para el recíproco basta considerar que si $v \neq 0$, como $\{v\} \subset V$ es linealmente independiente, sabemos que $\{f(v)\} \subset W$ es linealmente independiente y, por tanto, $f(v) \neq 0$ y $Ker\ f = \{0\}$.

2) Si $V = \langle S \rangle$, entonces $\operatorname{Im} f = \langle \{f(v) \mid v \in S\} \rangle$. En consecuencia, f es sobre si, y solo si, $W = \langle \{f(v) \mid v \in S\} \rangle$.

3) Por los dos apartados anteriores, si f es biyectiva y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es base de W.

Recíprocamente, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, utilizando la hipótesis, se tiene que $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es base de W. Por el teorema anterior, existe una única aplicación lineal $g \colon W \to V$ tal que $g(f(v_i)) = v_i$, para $i = 1, \ldots, n$; dicha aplicación g es inversa de f y de ello se tiene el resultado. □

Corolario 4.11. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces,*

$$V \text{ y } W \text{ son isomorfos si, y solo si, } \dim(V) = \dim(W).$$

Demostración. Si $f \colon V \to W$ es un isomorfismo y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, la proposición anterior nos demuestra que $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es base de W y, por tanto, $\dim(V) = n = \dim(W)$.

Recíprocamente, si $\dim(V) = n = \dim(W)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de W, la aplicación lineal $f \colon V \to W$ definida por $f(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$, es un isomorfismo, por la proposición anterior. □

Corolario 4.12. *Todo espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a K^n.*

Teorema 4.13 (Teorema de la dimensión). *Sea $f\colon V \to W$ una aplicación lineal y sea $\dim(V) = n$. Se verifica:*

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V).$$

Demostración. Como $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio vectorial de V, $\dim(\operatorname{Ker} f) = r \leq n$.

Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de $\operatorname{Ker} f$, es un subconjunto de V linealmente independiente y, por tanto, existen $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ tales que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V. Teniendo en cuenta que $f(v_i) = 0$, para $i = 1, \dots, r$, se tiene que $\operatorname{Im} f = \langle f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\rangle$.

Bastará comprobar que este conjunto de generadores de $\operatorname{Im} f$ es linealmente independiente. En efecto,

$$\begin{gathered}\alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \text{existen } \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in K \text{ tales que} \\ \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r.\end{gathered}$$

La independencia lineal de $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ muestra que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, y, en particular, que $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente. □

Corolario 4.14. *Sea V un K-espacio de dimensión n y $f\colon V \to V$ una aplicación lineal (endomorfismo de V).*

$$f \textit{ es inyectiva} \Leftrightarrow f \textit{ es sobre} \Leftrightarrow f \textit{ es un isomorfismo.}$$

Demostración. f es inyectiva $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}\ f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}\ f) = n \Leftrightarrow f$ es sobre. □

4.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de los espacios vectoriales V y W.

Definición 4.15. Si $f\colon V \to W$ es una aplicación lineal definida por $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, para cada v_j con $j = 1, \dots, n$, la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se llama *matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$* y se denota por $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Nótese que el orden de la matriz A es $m \times n$, siendo m la dimensión de W y n la de V, y que la matriz A tiene como columna j-ésima las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ de la imagen del vector v_j de $\mathcal{B}$.

Notación. Si V es un espacio vectorial, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$, es decir $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, la matriz columna $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la denotaremos por $(v)_{\mathcal{B}}$.

Observación 4.16. Utilizando notación matricial, para la aplicación lineal anterior f, se tiene que:

$$(f(v))_{\mathcal{B}'} = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)_{\mathcal{B}}.$$

En efecto, si $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, entonces

$$f(v) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}) w_i.$$

Ejemplos 4.17.

1. Si $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, y + z, z, x - z)$$

y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$ y de la base canónica es:

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, si $\mathcal{B}' = \{(0, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$, se tiene que

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, existe una aplicación lineal $f_A \colon K^n \to K^m$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es A, que está definida por:

$$f_A(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n).$$

3. Sean V y W espacios vectoriales, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente, y $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. La aplicación lineal $f\colon V \to W$ definida por $f(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$ para cada v_j, con $j = 1, \ldots, n$, tiene a A como matriz asociada respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

4. Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B}$ es cualquier base de V, la matriz asociada a la identidad de V respecto de la base $\mathcal{B}$ (en el dominio y en el rango) es I_n.

Veamos a continuación la relación entre el producto de matrices y la composición de aplicaciones lineales.

Proposición 4.18. *Sean V, W y U espacios vectoriales con bases $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}'=\{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}'' = \{u_1, \ldots, u_s\}$, respectivamente.*

Si $f : V \to W$ y $g\colon W \to U$ son aplicaciones lineales, entonces

$$(g \circ f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = (g)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{s\times n}(K).$$

Demostración. Si $v = \sum\limits_{j=1}^{n} x_jv_j$ y $(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, se verifica que:

$$(g)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)_{\mathcal{B}} = (g)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f(v))_{\mathcal{B}'} = (g(f(v)))_{\mathcal{B}''} = ((g\circ f)(v)))_{\mathcal{B}''} = (g\circ f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v)_{\mathcal{B}}.$$

Por lo tanto, si consideramos las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$, la igualdad anterior nos proporciona la igualdad de las columnas de las matrices $(g \circ f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$ y $(g)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. □

Ejemplo 4.19.

Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales definidas por $f(x, y) = x + y$ y $g(x) = (x, 3x)$.

La composición $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $(g \circ f)(x, y) = (x + y, 3x + 3y)$. Las matrices asociadas a estas aplicaciones en las bases canónicas son:

$$(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ (g)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } (g \circ f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Corolario 4.20. *Sean V y W K-espacios vectoriales con bases $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$, respectivamente, y $f\colon V \to W$ una aplicación lineal. Se verifica:*

f es un isomorfismo $\Leftrightarrow A = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es una matriz no singular.

Demostración. Si f es un isomorfismo, $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ tiene como inversa $(f^{-1})_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Por otra parte, si A es no singular existe una única aplicación lineal $g\colon W \to V$ tal que $g(w_i) = \sum_{k=1}^{n} A^{-1}(k,i)v_k$, para $i = 1,\dots,n$. Se verifica que $(g)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = A^{-1}$ y g es la aplicación inversa de f. □

4.2. Matriz de cambio de base

Hemos visto que un espacio vectorial puede tener más de una base y vamos a estudiar como varían las coordenadas de un vector al cambiar la base.

Consideraremos que V es un espacio vectorial de dimensión n y que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V.

Definición 4.21. Se llama *matriz de cambio de base de* $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ a la matriz asociada a la aplicación identidad de V considerando en el dominio la base $\mathcal{B}$ y en el codominio la base $\mathcal{B}'$, es decir, la matriz $(id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Nótese que si $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1,\dots,v'_n\}$ y $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v'_i$, se verifica que $(id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Además, $(v)_{\mathcal{B}'} = (id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)_{\mathcal{B}}$, es decir, al multiplicar la matriz del cambio de base por la matriz columna de las coordenadas de un vector v en la base $\mathcal{B}$ nos da la matriz columna de las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}'$.

Observaciones 4.22.

1. La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es no singular, por estar asociada a un isomorfismo, y su inversa es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. La aplicación lineal $f : V \to K^n$ definida por $f(v_i) = e_i$ (siendo e_i el i-ésimo vector de la base canónica de K^n) es un isomorfismo, que denominaremos *isomorfismo de asignación de coordenadas.* En consecuencia, $\{v'_1,\dots,v'_n\} \subset V$ es una base de V si, y solo si, la matriz A, definida por $C_i(A) = (a_{1i},\dots,a_{ni})^t$, con $v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j$ para todo $i = 1,\dots,n$, es de rango n, es decir, es no singular.

3. Toda matriz no singular es una matriz de cambio de base.

En efecto, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz no singular y $\mathcal{B}'= \{v'_1,\dots,v'_n\}$ es una base de V, si definimos $v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}v'_k$, para $j = 1,\dots,n$, entonces otra base de V es $\mathcal{B}= \{v_1,\dots,v_n\}$ y la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es A.

4. Si $\mathcal{B}$ es una base de K^n, es trivial calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica.

Nos planteamos ahora la siguiente pregunta. ¿Cómo cambia la matriz de una aplicación lineal al cambiar las bases en el dominio y en el rango?

Proposición 4.23. *Sean V y W espacios vectoriales, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}'_V = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ bases de V y $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}'_W = \{w'_1, \ldots, w'_m\}$ bases de W.*

Si $f\colon V \to W$ es una aplicación lineal, se verifica que:

$$(f)_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = (id_W)_{\mathcal{B}'_W,\mathcal{B}_W}(f)_{\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W}(id_V)_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}'_V}.$$

Demostración. El resultado es consecuencia de que $f = id_W \circ f \circ id_V$ y de la proposición 4.18. $\square$

Ejemplo 4.24. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ las siguientes bases:

$\mathcal{B}=\{(1,1,1),(1,2,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}'=\{(1,2,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ y $\mathcal{C}$ la canónica.

La matrices de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$ son:

$$(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad \text{y} \qquad (id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (A')^{-1}.$$

Además, $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Nótese que, también se podría hallar directamente $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ sin más que expresar los vectores de la base $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los de la base $\mathcal{B}'$, como vemos a continuación. Para ello debemos de resolver tres sistemas de ecuaciones con $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}$ como matriz del sistema, es decir,

$(1,1,1) = x(1,2,1) + y(1,0,0) + z(1,0,1)$

$(1,2,0) = x'(1,2,1) + y'(1,0,0) + z'(1,0,1)$

$(0,0,1) = x''(1,2,1) + y''(1,0,0) + z''(1,0,1)$

Para resolverlos, simultáneamente, escalonamos la matriz $(A|A')$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_2]{F_2\longleftrightarrow F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2-F_3]{-F_2,\,(-\frac{1}{2})F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y así,

$$(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.25. Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se dice que A y B son *equivalentes* si existen matrices no singulares $P \in \mathcal{M}_m(K)$ y $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ tales que $A = PBQ$.

En particular, si A y B son equivalentes por filas (respectivamente, por columnas) son equivalentes siendo en este caso $Q = I_n$ (respectivamente, $P = I_m$).

Observación 4.26. Teniendo en cuenta que toda matriz no singular puede ser pensada como una matriz de un cambio de base, podemos afirmar que dos matrices son equivalentes si, y solo si, son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de diferentes bases.

Teorema 4.27. *Sean V y W espacio vectoriales de dimensión n y m y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V y W, respectivamente.*

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal tal que $A = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces $r(A) = \dim(\mathrm{Im}\ f)$.

Demostración. Sean $\mathcal{B}= \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}w_i$. Las coordenadas de $f(v_j)$ en la base $\mathcal{B}'$ son $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$, es decir, la fila j-ésima de la matriz A^t. Puesto que la asignación de coordenadas es un isomorfismo entre W y K^m, se tiene que:

$$r(A) = r_c(A) = \dim(\langle C_1(A), \ldots, C_n(A)\rangle) = \dim(\langle f(v_1), \ldots, f(v_n)\rangle) = \dim(\mathrm{Im}\ f). \quad \square$$

Corolario 4.28. *Dos matrices equivalentes tienen el mismo rango.*

Demostración. Como vimos en la observación 4.26, dos matrices equivalentes son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de diferentes bases y el rango de ambas coincide con la dimensión de la imagen de dicha aplicación lineal. $\square$

Este resultado ya lo conocíamos, sabíamos que dos matrices equivalentes por filas o por columnas tienen el mismo rango; si A y B son equivalentes, existen matrices no singulares $P \in \mathcal{M}_m(K)$ y $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ tales que $A = PBQ$, así, A y BQ son equivalentes por filas y BQ y B son equivalentes por columnas y, por tanto, todas tienen el mismo rango.

Teorema 4.29. *Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.*

Las matrices A y B son equivalentes si, y solo si, $r(A) = r(B)$

Demostración. En el corolario anterior vimos que las matrices equivalentes tienen el mismo rango.

Recíprocamente, basta con demostrar que si $r(A) = r$ entonces la matriz A es equivalente a $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Para ello consideremos la aplicación lineal $f\colon K^n \to K^m$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es A. Dado que $\dim(\operatorname{Im} f) = r(A) = r$ y que, por el teorema 4.13, $n = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$, se tiene que $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - r$.

Si $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $\operatorname{Ker} f$, existen $v_1, \dots, v_r \in K^n$ de manera que $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de K^n.

Por otra parte, $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\} \subset \operatorname{Im} f$ es un conjunto de generadores de $\operatorname{Im} f$ con tantos elementos como su dimensión y, por tanto, es una base de $\operatorname{Im} f$.

Existen $w_{r+1}, \dots, w_m \in K^m$ tales que $\mathcal{B}' = \{f(v_1), \dots, f(v_r), w_{r+1}, \dots, w_m\}$ es una base de K^m y así la matriz asociada a f, respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, es $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Corolario 4.30. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se verifica que $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid AX = 0\}$ es un subespacio de K^n de dimensión $n - r(A)$.*

Demostración. Si consideramos $f\colon K^n \to K^m$ la aplicación lineal que tiene A como matriz asociada respecto de las bases canónicas, $U = \operatorname{Ker} f$ es un subespacio de K^n. Además como, por el teorema 4.13, $n = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f) + r(A)$, se tiene que $\dim(U) = n - r(A)$. □

Definición 4.31. Sean A, $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Las matrices A y B son *semejantes* si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(K)$ no singular de modo que $B = PAP^{-1}$.

Nótese que si dos matrices cuadradas son semejantes también son equivalentes. El recíproco no es cierto, toda matriz es equivalente a una que es diagonal, como nos muestra la demostración del teorema 4.29, pero no es semejante a una matriz diagonal. El objetivo de nuestro próximo tema es estudiar en que condiciones una matriz es semejante a una que sea diagonal.

4.3. Ejercicios

1.- ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales?

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (x - y, 0)$.

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $f(x, y) = (x + 3y, -2x, 2)$.

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.

d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y, z) = (y, xz)$.

2.- Dadas las aplicaciones:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x - y, x + y, -x + y)$.

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, 1)$.

c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (y, 0, 2y - z)$.

d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, z^3)$.

Se pide:

i) Determinar cuales son lineales.

ii) En las aplicaciones lineales obtenidas, hallar el núcleo, la imagen e indicar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

3.- ¿Existe alguna aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 0) = (1, 1)$, $f(3, 2) = (1, -1)$ y $f(3, 3) = (2, 2)$?

4.- Probar que dado un K-espacio vectorial V, toda aplicación lineal $f\colon V \to K$ no nula es sobreyectiva.

5.- Sean $f\colon V \to V'$ y $g\colon V' \to V''$ aplicaciones lineales y $v \in V$. Demostrar que:

$$v \in \text{Ker } f \Rightarrow \langle v \rangle \subset \text{Ker } (g \circ f)\,.$$

6.- Dadas aplicaciones lineales $f\colon V \to V'$ y $g\colon V' \to V^{''}$, probar las siguientes afirmaciones:

a) $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ y $\text{Ker } f \subset \text{Ker } (g \circ f)$.

b) $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

7.- Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y, x - y).$$

Se pide:

a) Hallar una base y las ecuaciones implícitas de $\text{Ker}\, f$.

b) Hallar una base y la dimensión de $\text{Im}\, f$.

c) Analizar si el vector $(4, 0, 2)$ pertenece a $\text{Im}\, f$.

8.- Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z) = (y+2z, \alpha x + 2\beta y + \alpha z, x+y-z, x+2y+z).$$

Determinar α y β para que f no sea inyectiva.

9.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z).$$

a) Probar que f no tiene inversa.

b) Sea $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\}$, calcular una base del subespacio $f^{-1}(U)$.

c) Si $W = \langle (0,1,1), (1,1,a) \rangle$, determinar para que valores de a la dimensión de $f(W)$ es 1.

10.- Sean V y W dos espacios vectoriales, $f\colon V \to W$ una aplicación lineal y v_1,$v_2 \in V$. Razonar, dando una demostración o un contraejemplo, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) $f(\langle v_1, v_2 \rangle)$ es un subespacio vectorial de dimensión 2.

b) Si v_1 y v_2 son vectores linealmente dependientes, entonces $f(v_1)$ y $f(v_2)$ son vectores linealmente dependientes.

c) Si $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, entonces $W = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle$.

11.- Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales dadas por:

$$f(x,y,z) = (x, -x+y+2z) \text{ y } g(x,y) = (x+y, -x-y, 2x).$$

a) Calcular las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ mediante la aplicación lineal $h = g \circ f$.

b) Determinar unas ecuaciones implícitas del subespacio $h^{-1}\langle (-1,1,2) \rangle$.

c) Calcular una base del núcleo de h y sus ecuaciones.

d) Determinar la imagen mediante h de la intersección de los subespacios:

$$U = \{(a+b, a-b, -b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \text{ y } W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\}.$$

12.- Sean $u = (1,-1,3)$, $v = (-3,3,\alpha) \in \mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal tal que $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. ¿Para que valores de α se cumple que $f(u) = f(v)$?

13.- Hallar una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen esté generada por los vectores siguientes: $(1,1,1)$ y $(1,1,0)$. ¿Es única?

14.- Hallar una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea el siguiente subespacio $\langle (1,1,-1,1),(0,0,1,1)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

15.- Encontrar una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de modo que $\operatorname{Ker} f = \langle (1,1,1)\rangle$ y que $\operatorname{Im} f \ = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. ¿Es única?

16.- ¿Existe una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de forma que su núcleo sea el subespacio generado por $\{(1,1,0),(0,1,0)\}$ y la imagen esté generada por $\{(1,1,1,0),(1,0,0,2)\}$?

17.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (x+z, x+y+2z, x-y).$$

a) Calcular una base para $\operatorname{Ker} f$ y otra para $\operatorname{Im} f$.

b) Siendo $U = \big\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\big\}$, encontrar una base para $f^{-1}(U)$.

c) Si $W = \langle (1,2,1),(2,2+a,0)\rangle$, determinar para que valores de a la dimensión de $f(W)$ es 1.

18.- Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z,t) = (x+z, x-y+z, x+t).$$

a) Calcular una base para $\operatorname{Ker} f$ y otra para $\operatorname{Im} f$.

b) Si $U = \langle (1,1,1,1),(-2,2,6,6)\rangle$, calcular una base y unas ecuaciones implícitas para $f(U)$.

c) Sea $T = \langle (1,1,0),(0,0,1)\rangle$. Calcular unas ecuaciones implícitas y una base para el subespacio $f^{-1}(T)$.

d) Encontrar dos vectores distintos $v, v' \in \mathbb{R}^4$ tales que $f(v) = f(v') = (1,2,3)$ y justificar que $f^{-1}(\{(1,2,3)\})$ no es subespacio de $\mathbb{R}^4$.

19.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (x+z, y, x+2y+z).$$

a) ¿Es f inyectiva?

b) Calcular para que valores de α el vector $(2,-2,1+\alpha)$ está en $\operatorname{Im} f$.

c) Si $W = \big\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x-az=0\big\}$, determinar para que valores de a la dimensión de $f(W)$ es 1.

d) Sea $\mathcal{B} = \{(0,1,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, calcular las coordenadas de $f(1,1,1)$ en la base $\mathcal{B}$.

20.- Sea $U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-3z=0\big\}$.

a) Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal tal que $\operatorname{Ker} f = U$. ¿Para qué valor de α se cumple que $f(1,1,2) = f(-1,0,\alpha)$?

b) Definir dos aplicaciones lineales distintas, $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, verificando que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g = U$.

21.- Sean V un K-espacio vectorial de dimensión 2 y $\{v_1,v_2\}$ una base de V. Se considera la aplicación lineal $f\colon V \to V$ definida por $f(v_1) = v_1$ y $f(v_2) = -v_1$. Calcular las dimensión de $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

22.- Se consideran las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$:
$B = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,-1)\}$ y $B' = \{(1,0,1),(0,1,-1),(0,1,0)\}$.
Si $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son las aplicaciones lineales definidas por:

$$f((1,1,0)) = (1,1,1),\ f((0,1,1)) = (0,1,2) \text{ y } f((0,0,-1)) = (0,0,0);$$
$$g(1,0,1)) = (1,0,-1),\ g(0,1,-1)) = (0,1,2) \text{ y } g(0,1,0)) = (0,1,2).$$

a) Calcular $f(x,y,z)$.

b) Demostrar que $f = g$.

23.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y) = (x-y, 2x, -y)$. Sean $B = \{(1,0),(1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcular $(f)_{B,B'}$.

24.- Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z) = (x+y, 2y-z).$$

a) Calcular la matriz asociada a f en las bases canónicas.

b) Hallar bases y la dimensión de $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Ker} f$.

c) Si $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(0,1,2),(0,2,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(2,1),(1,0)\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, calcular las matrices de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a la base canónica en $\mathbb{R}^3$ y la de la base $\mathcal{B}_2$ a la canónica de $\mathbb{R}^2$, así como la matriz de f respecto a $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

25.- Definir una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:
$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ e $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0, y = 0\}$.
Calcular $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

26.- Sean $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ y $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

b) Justificar que f es un isomorfismo y calcular $(f^{-1})_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

27.- Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que cumple

$$\left.\begin{array}{r} f(u_1) = u_1 - 2u_2 + u_3 \\ f(u_2) = -2u_1 + 3u_3 \\ \operatorname{Ker} f = \langle 2u_1 - u_2 + u_3 \rangle \end{array}\right\}$$

a) Calcular la matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$.

b) Calcular la matiz asociada a f respecto de la base $\mathcal{D} = \{u_2, u_2 - u_1, u_3 - u_2 - u_1\}$.

28.- Sean $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de la base $\mathcal{B}$ es:

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $\mathcal{B}' = \{u_3, f(u_3), f^2(u_3)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcular la matiz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}'$.

29.- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la aplicación $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$(f_\alpha)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 2\alpha \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar la dimensión de $\operatorname{Im} f_\alpha$, según los valores de α.

b) Calcular $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de modo que $(\beta, \gamma, 2) \in \operatorname{Ker} f_1$.

c) Encontrar unas ecuaciones para $\operatorname{Im} f_{-1}$.

30.- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define la aplicación lineal $f_\alpha \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f_\alpha(x, y, z, t) = (\alpha x + y, x + \alpha z, y + t).$$

a) Estudiar los valores de α que hacen que f_α sea inyectiva y los que la hacen sobreyectiva.

b) Hallar una base de $\operatorname{Ker} f_2$.

c) Calcular $f_0(L)$, siendo $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z = 0\}$.

31.- Justificar la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Una aplicación lineal $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ no puede ser sobreyectiva.

b) Si $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, entonces $\operatorname{Ker} f \neq \{(0, 0, 0)\}$.

c) Si $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, entonces $\operatorname{Ker} f \neq \{(0, 0)\}$

d) Si $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal inyectiva, entonces $m = n$ y f es isomorfismo.

32.- Se considera la aplicación lineal $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y, z, x + y + 2z).$$

a) ¿Es f inyectiva?

b) Calcular para que valores de α el vector $(1, \alpha, 7)$ está en $\operatorname{Im} f$.

c) Si $W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - ay = 0\big\}$, determinar para que valores de a la dimensión de $f(W)$ es 1.

d) Sea $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), \}$ una base de $\mathbb{R}^3$, calcular las coordenadas de $f(1, 1, 1)$ en la base $\mathcal{B}$.

33.- Sea $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Razonar, dando una demostración o un contraejemplo, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

a) f es sobreyectiva.

b) f no es inyectiva.

c) $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.

34. Sea $f_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f_a(x, y, z) = (x, y + az, ay + 4z, x + y + az).$$

a) Calcular la dimensión de $\operatorname{Im} f_a$, según los valores de a.

b) Determinar para que valores de a se tiene que f_a es inyectiva.

c) Encontrar un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que $Imf_2 + U = \mathbb{R}^4$. ¿Es único?

d) Si es posible, definir una aplicación lineal inyectiva $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ verificando que $\operatorname{Im} f_2 \subset \operatorname{Im} g$.

35.- Sean $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ su base canónica.

a) Calcular las matrices: $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ y $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

b) Hallar las coordenadas del vector $v = (3,4,2)$ en la base $\mathcal{B}$.

36.- Sean $\mathcal{B} = \{(1,1,0,1),(0,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,3)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(1,0,0) = (1,1,0,1),\ f(0,1,0) = (-1,2,0,0) \text{ y } f(0,0,1) = (0,3,0,1).$$

a) Hallar la matriz de cambio de base de la base canónica a la base $\mathcal{B}$, en $\mathbb{R}^4$.

b) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y de la base $\mathcal{B}$.

c) Hallar las coordenadas de $f(1,1,0)$ en la base $\mathcal{B}$.

37 .- Sean $B = \{(1,0),(1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0),(0,-1,0),(0,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x,y) = (x+y, x, -2y)$. Calcular $(f)_{B,B'}$.

Capítulo 5

Diagonalización de matrices

5.1. Valores y vectores propios

En este tema V es un K-espacio vectorial de dimensión finita n.

Definición 5.1. Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo de V.

1. Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un *valor propio (o autovalor) de* f si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$.

2. Se dice que un vector $v \in V$ es un *vector propio (o autovector)* si existe $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Lema 5.2. *Sean $f\colon V \to V$ un endomorfismo de V y $\lambda \in K$.*

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \text{ es un subespacio de } V.$$

Cuando $\lambda \in K$ es un valor propio de f este subespacio se llamará subespacio propio asociado al valor propio λ.

Además, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$, entonces $\dim(V_\lambda) = n - r(A - \lambda I_n)$.

Demostración. Es suficiente con constatar que:

$V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_V)$, en donde $\lambda id_V\colon V \to V$ es la aplicación lineal definida, por $\lambda id_V(v) = \lambda v$, para cada $v \in V$.

Además, ya que $(f - \lambda id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = A - \lambda I_n$, se verifica que:

$$\dim(V_\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda id_V)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f - \lambda id_V)) = n - r(A - \lambda I_n). \qquad \square$$

Proposición 5.3. *Sean $f\colon V \to V$ un endomorfismo de V, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$ y $\lambda \in K$. Se verifica que:*

λ es un valor propio de f si, y solo si, $|A-\lambda I_n| = 0$.

Demostración. Sin más que considerar que $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f-\lambda id_V)$, se tiene que

$$\lambda \text{ es un valor propio de } f \Leftrightarrow Ker(f-\lambda id_V) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f-\lambda id_V)) = n - r(A-\lambda I_n) \neq 0 \Leftrightarrow r(A-\lambda I_n) < n \Leftrightarrow |A-\lambda I_n| = 0. \quad \square$$

Ejemplo 5.4. Consideremos el endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$f(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y).$$

f tiene la siguiente matriz asociada respecto de la base canónica

$$(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$\lambda \text{ es un valor propio de } f \Leftrightarrow |A-\lambda I_n| = 0$$

$$|A - xI_n| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{F_1 \longleftrightarrow F_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 1 & -x & 1 \\ -x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+xF_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 0 & -x-1 & 1+x \\ 0 & 1+x & 1-x^2 \end{vmatrix} = -(1+x)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -(1+x)^2(x-2).$$

Es decir, los valores propios de f son -1 y 2.

Para calcular $V_2 = Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$ debemos de resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando Gauss se tiene que:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \longleftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3+2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3+F_2 \\ -\frac{1}{3}F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde, $y = z = x$ y $V_2 = \langle (1,1,1) \rangle$.

También $V_{-1} = \mathrm{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3})$ y para calcularlo resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, $V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \langle (1, -1, 0), (0, 1, -1) \rangle$.

5.2. El anillo de polinomios K[x]

Dado un cuerpo K, un *polinomio en la indeterminada* x con coeficientes en K es una expresión de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

donde $a_i \in K$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Si $a_i = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$, $f(x)$ se llama *polinomio cero*. En caso contrario, el mayor entero s tal que $a_s \neq 0$ se llama *grado del polinomio* $f(x)$, denotado por $\partial f(x)$, a_s se llama *coeficiente principal* y a_i es el *coeficiente de grado* i, $0 \leq i \leq n$. Un polinomio de grado 0 se llama *polinomio constante*. Cuando el coeficiente principal es 1, el polinomio se dice que es *mónico*.

Dos polinomios, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ y $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, son *iguales* si tienen el mismo grado y $a_i = b_i$, para todo i, $0 \leq i \leq \partial f(x) = \partial g(x)$.

El conjunto de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en K se denota por $K[x]$.

Ejemplo 5.5. En $\mathbb{R}[x]$ la expresión $3x^6 + 4x^5 + x^2 + 4x + 2$ es un polinomio de grado 6, con coeficiente principal 3.

5.3. Suma y producto en K[x]

Sean $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ y $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ polinomios en $K[x]$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $n \geq m$ y, si $n > m$, ponemos $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$. Se define la suma $f(x) + g(x)$ y el producto $f(x)g(x)$ de los polinomios de la forma siguiente:

El coeficiente de x^i en $f(x) + g(x)$ es $a_i + b_i$, para cada $0 \leq i \leq n$.

El coeficiente de x^i, para $0 \leq i \leq n + m$, en $f(x)g(x)$ es

$$\sum_{r+s=i} a_r b_s = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots + a_i b_0,$$

donde las sumas y productos son en K. Es decir,

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \text{ y}$$
$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}.$$

De estas definiciones se deduce que $f(x) + g(x)$ y $f(x) \cdot g(x)$ pertenecen a $K[x]$. Además, si $f(x) + g(x) \neq 0$ y $f(x) \cdot g(x) \neq 0$,

$$\partial(f(x) + g(x)) \leq max\{\partial f(x), \partial g(x)\} \text{ y } \partial(f(x)g(x)) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Ejemplo 5.6. Si consideramos $f(x) = 3+2x+4x^2+4x^5, g(x) = 3x+2x^2+4x^3 \in \mathbb{R}[x]$,

$$f(x) + g(x) = 3 + 5x + 6x^2 + 4x^3 + 4x^5 \text{ y}$$
$$f(x)g(x) = 0 + 9x + 12x^2 + \cdots + 16x^8.$$

Con estas operaciones $(K[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario. Sin embargo, $K[x]$ no es un cuerpo, puesto que los únicos elementos con inverso son los polinomios constantes no nulos.

En lo que sigue, veremos cómo las propiedades de divisibilidad en $K[x]$ y los resultados que de ellas se deducen son análogas a las correspondientes en el anillo $\mathbb{Z}$.

5.4. Algoritmo de división en K[x]

Proposición 5.7 (Algoritmo de división)**.**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con coeficientes en un cuerpo K, siendo $g(x) \neq 0$. Existen polinomios únicos $q(x), r(x)$ en $K[x]$ tales que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, donde $\partial r(x) < \partial g(x)$ o $r(x) = 0$.

Demostración. Prueba de la existencia:

Sean $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in K[x]$ con $\partial f(x) = n$ y $\partial g(x) = m$.

Si $\partial f(x) < \partial g(x)$, el resultado se cumple para $q(x) = 0$ y $r(x) = f(x)$.

Supongamos pues que $\partial f(x) \geq \partial g(x)$. Haremos la demostración por inducción en $\partial f(x) = n$.

Si $n = 0$, entonces $\partial g(x) = 0$, $g(x) = b_0 \neq 0$ y $f(x) = a_0 = (a_0b_0^{-1})b_0 + 0$. Basta tomar $q(x) = a_0b_0^{-1}$ y $r(x) = 0$.

Supongamos $n > 0$ y que el resultado es cierto para aquellos polinomios cuyo grado es menor que n.

El polinomio $f_1(x) = f(x) - a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x) \in K[x]$ verifica que $\partial f_1(x) < n$.

Aplicando la hipótesis de inducción, existen polinomios $q_1(x), r_1(x) \in K[x]$ tales que $f_1(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$ con $\partial r_1(x) < \partial g(x)$ o $r_1(x) = 0$.

Así pues, $f(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + f_1(x) = (a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x))g(x) + r_1(x)$ y tomando $q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)$ y $r(x) = r_1(x)$ se obtiene $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, donde $\partial r(x) < \partial g(x)$ o $r(x) = 0$.

Esto completa la inducción y el resultado es cierto para todos los valores de $\partial f(x)$.

Prueba de la unicidad:
Supongamos ahora que, $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$, donde $\partial r_i(x) < \partial g(x)$ o $r_i(x) = 0$, $(i = 1, 2)$.

Entonces, $(q_1(x) - q_2(x))g(x) = r_2(x) - r_1(x)$.

Si $q_1(x) \neq q_2(x)$, $\partial[(q_1(x) - q_2(x))g(x)] \geq \partial g(x)$, mientras que $\partial(r_2(x) - r_1(x)) \leq max\{\partial r_1(x), \partial r_2(x)\} < \partial g(x)$.

Se llega así a una contradicción y, en consecuencia, $q_1(x) = q_2(x)$ y $r_1(x) = r_2(x)$. □

Los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ se llaman *cociente* y *resto*, respectivamente, de dividir $f(x)$ por $g(x)$. Si $r(x) = 0$ se dice que $g(x)$ *divide* a $f(x)$.

Nótese que la construcción de $f_1(x)$ en la demostración anterior da un algoritmo para dividir dos polinomios.

Definición 5.8. Sean $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in K[x]$ y $\alpha \in K$.
Llamaremos *evaluación* de $f(x)$ en α al elemento $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \in K$.
Diremos que α es una *raíz* o un *cero* de $f(x)$ cuando $f(\alpha) = 0$.

Nótese que si $f(x), g(x) \in K[x]$ se verifica que la evaluación de $f(x) + g(x)$ en α es $f(\alpha) + g(\alpha)$ y la evaluación de $f(x)g(x)$ en α es $f(\alpha)g(\alpha)$.

Teorema 5.9 (Teorema del resto)**.**
Sean $f(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$. El resto de la división de $f(x)$ por $x - \alpha$ es $f(\alpha)$.

Demostración. Por el algoritmo de división, $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$ con $r(x) = 0$ o $\partial r(x) < \partial(x - \alpha) = 1$. Por lo tanto, $r(x) = r$ es un elemento de K. Si evaluamos $f(x)$ en α se obtiene $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0 + r$. □

Teorema 5.10 (Teorema del factor)**.**
Sean $f(x) \in K[x]$ y $\alpha \in K$. Entonces, $x - \alpha$ divide a (o es un factor de) $f(x)$ si, y solo si, α es raíz de $f(x)$.

Demostración. Por el teorema del resto, $x - \alpha$ divide a $f(x)$ si, y solo si, $f(\alpha) = 0$. □

Definición 5.11. Sean $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in K[x]$ y $\alpha \in K$, diremos que α es una *raíz* de $f(x)$ de *multiplicidad* m si $(x - \alpha)^m$ divide a $f(x)$ pero $(x - \alpha)^{m+1}$ no divide a $f(x)$.

5.5. Polinomio característico

Definición 5.12. Si $f\colon V \to V$ es un endomorfismo de V y $A \in \mathcal{M}_n(K)$ la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$, entonces

$$|A - xI_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

es un polinomio de grado n con coeficientes en K que se llama *polinomio característico de* A.

Nótese que si A' es la matriz asociada a f respecto de otra base $\mathcal{B}'$ y $P = (id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, hemos visto que $A = P^{-1}A'P$. Entonces,

$$\begin{aligned} |A - xI_n| &= \left|P^{-1}A'P - xI_n\right| = \left|P^{-1}A'P - P^{-1}(xI_n)P\right| \\ &= \left|P^{-1}(A' - xI_n)P\right| = \left|P^{-1}\right| \left|A' - xI_n\right| |P| = \left|A' - xI_n\right|. \end{aligned}$$

Como este polinomio no varia si se cambia la matriz A por otra que sea semejante a ella, se dirá también que es el *polinomio característico de* f y se denotará por $p_c(f)$.

Obsérvese que los valores propios de A (o f) son pues los ceros de su polinomio característico.

Definición 5.13. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ es *diagonalizable* si existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada a f es una matriz diagonal.

Está claro que si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots , v_n\}$ es una base de V,

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(v_i) = \lambda_i v_i, \text{ para } i = 1, \dots , n$$

$\Leftrightarrow \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V formada por vectores propios.

Definición 5.14. Una matriz cuadrada es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal.

Hay que tener presente que si f es diagonalizable el polinomio característico de f es de la forma

$$(\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_s - x)^{m_s},$$

en donde m_i es la multiplicidad de la raíz λ_i y el número de veces que aparece repetido el autovalor λ_i en la diagonal.

Es claro que no todo endomorfismo es diagonalizable, por ejemplo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = (-y,x)$ tiene $p_c(f) = x^2+1$ y no es diagonalizable.

Es evidente que para que podamos diagonalizar un endomorfismo debemos de encontrar n vectores propios linealmente independientes.

Proposición 5.15. *Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo de V.*

1. *Si $\alpha, \beta \in K$ son valores propios de f distintos, entonces:*

a) $V_\alpha \cap V_\beta = \{0\}$.

b) *Si $\mathcal{B}_\alpha$ es una base de V_α y $\mathcal{B}_\beta$ es una base de V_β, entonces la unión disjunta $\mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\beta$ es una base de $V_\alpha + V_\beta$ y*

$$\dim(V_\alpha + V_\beta) = \dim(V_\alpha) + \dim(V_\beta).$$

2. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ valores propios de f distintos dos a dos.*

a) *Si $i \neq j$, entonces $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$.*

b) *Si $\mathcal{B}_{\lambda_i} = \{v_{1i}, \ldots, v_{n_i i}\}$ es una base de V_{λ_i} para cada $i = 1, \ldots, s$, entonces la unión disjunta $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\lambda_s}$ es una base de $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}$ y*

$$\dim(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_s}).$$

Demostración.

1.a) Si $v \in V_\alpha \cap V_\beta$, entonces $f(v) = \alpha v = \beta v$ y, por ser $\alpha \neq \beta$, se tiene que $v = 0$.

1.b) $V_\alpha + V_\beta = \langle \mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\beta \rangle$ y, como

$$\dim(V_\alpha) + \dim(V_\beta) = \dim(V_\alpha + V_\beta) + \dim(V_\alpha \cap V_\beta) = \dim(V_\alpha + V_\beta),$$

se tiene que $\mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\beta$ es una base de $V_\alpha + V_\beta$.

2.b) Se demuestra por inducción en s.

Si $s = 1$ es trivial.

Supuesto $s > 1$ y el resultado cierto para menos de s valores propios, veamos que $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\lambda_s}$ es linealmente independiente:

Si $0 = \underbrace{a_{11}v_{11} + \cdots + a_{n_1 1}v_{n_1 1}}_{=u} + \underbrace{\cdots + a_{1s}v_{1s} + \cdots + a_{n_s s}v_{n_s s}}_{=u'}$, entonces

$u' = -u \in V_{\lambda_1}$ y, así,

$f(u') = \lambda_1 u' = \lambda_1 a_{12}v_{12} + \cdots + \lambda_1 a_{n_2 2}v_{n_2 2} + \cdots + \lambda_1 a_{1s}v_{1s} + \cdots + \lambda_1 a_{n_s s}v_{n_s s}$

$= \lambda_2 a_{12} v_{12} + \cdots + \lambda_2 a_{n_2 2} v_{n_2 2} + \cdots + \lambda_s a_{1s} v_{1s} + \cdots + \lambda_s a_{n_s s} v_{n_s s}$, de donde

$(\lambda_2 - \lambda_1) a_{12} v_{12} + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_1) a_{n_2 2} v_{n_2 2} + \cdots + (\lambda_s - \lambda_1) a_{1s} v_{1s} + \cdots$

$+(\lambda_s - \lambda_1) a_{n_s s} v_{n_s s} = 0.$

Por la hipótesis de inducción, se tiene que

$$(\lambda_2 - \lambda_1) a_{12} = 0, (\lambda_2 - \lambda_1) a_{n_2 2} = 0, \ldots, (\lambda_s - \lambda_1) a_{n_s s} = 0,$$

y, teniendo en cuenta que $\lambda_i \neq \lambda_1$ para todo $i \neq 1$, obtenemos que

$$a_{12} = \cdots = a_{n_2 2} = \cdots = a_{n_s s} = 0$$

y, por tanto, $0 = u' = -u$ y $a_{11} = \cdots = a_{n_1 1} = 0$, al ser $\mathcal{B}_{\lambda_1}$ linealmente independiente. □

Proposición 5.16. *Si $f\colon V \to V$ es un endomorfismo de V y λ es un valor propio de multiplicidad m, entonces $\dim(V_\lambda) \leq m$.*

Además, si λ un valor propio simple $\dim(V_\lambda) = 1$.

Demostración. Si $\{v_1, \ldots, v_s\}$ es una base de V_λ y la completamos a una base de V, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_n\}$, se tiene que

$$M = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda I_s & M" \\ 0 & M' \end{pmatrix}.$$

Entonces, el polinomio característico de f es

$$p_c(f) = |M - xI_n| = (\lambda - x)^s \left| M' - xI_{n-s} \right|.$$

Y, como la multiplicidad de λ en $p_c(f)$ es m, se deduce que $s \leq m$.

Si $m = 1$, como $0 < \dim(V_\lambda) \leq 1$, se obtiene que $\dim(V_\lambda) = 1$. □

Teorema 5.17. *Sea $f\colon V \to V$ un endomorfismo de V,*

$$f \text{ es diagonalizable si, y solo si, } p_c(f) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_s - x)^{m_s} \text{ siendo } \lambda_i \in K,$$
$$1 \leq m_i \leq n,\ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j \text{ y } \dim(V_{\lambda_i}) = m_i\ \forall i = 1, \ldots, s.$$

Demostración.
"$\Rightarrow$" Si f es diagonalizable existe una base $\mathcal{B}$ de V de modo que

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de f es $p_c(f) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_s - x)^{m_s}$ y, dado que $V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i id_V)$, se tiene que $\dim(V_{\lambda_i}) = n - r((f)_{\mathcal{B}} - \lambda_i I_n) = n - (n - m_i) = m_i$.

"$\Leftarrow$" Como $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}$ es un subespacio de V y

$$\dim(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_s}) = \sum_{i=1}^{s} m_i = \partial p_c(f) = n,$$

se tiene que $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s} = V$ y $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\lambda_s}$ es una base de V formada por vectores propios, es decir f es diagonalizable. □

Corolario 5.18. *Si $f\colon V \to V$ es un endomorfismo de V de tal forma que $p_c(f) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, entonces f es diagonalizable.*

Demostración. Trivial ya que $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$ para todo i. □

Ejercicio 5.19. Probar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Demostración. En primer lugar calculamos el polinomio característico de la matriz A.

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 \\ -2 & 4-x & -2 \\ -2 & 2 & -x \end{vmatrix} \underset{F_3 - F_2}{=} \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 \\ -2 & 4-x & -2 \\ 0 & x-2 & -x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 \\ -2 & 4-x & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 + C_3}{=} (x-2) \begin{vmatrix} -x & 0 & -2 \\ -2 & 2-x & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(x-2)^2 x.$$

Tenemos pues el autovalor 0 de multiplicidad uno y el autovalor 2 de multiplicidad dos.

Los subespacios propios son:

$$V_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{cccc} & +2y & -2z & = 0 \\ -2x & +4y & -2z & = 0 \\ -2x & +2y & & = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} = \langle (1,1,1) \rangle \text{ y}$$

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rrrl} -2x & +2y & -2z & =0 \\ -2x & +2y & -2z & =0 \\ -2x & +2y & -2z & =0 \end{array} \right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+2y-2z=0\} = \{(x,y,-x+y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle.$$

Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \qquad \square$$

5.6. Ejercicios

1.- Calcular los valores propios y los subespacios propios de los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ dados por:

a) $f(x,y,z) = (x+2y, -x+3y+z, y+z)$,

b) $g(x,y,z) = (3x-8y+8z, -4x+7y-8z, -4x+8y-9z)$.

2.- Estudiar si son diagonalizables los endomorfismos del ejercicio anterior. Si es posible, encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $(g)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sea diagonal.

3.- Se consideran los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ dados por:

a) $f(x,y,z) = (3x-y, -x+2y-z, -y+3z)$,

b) $f(x,y,z) = (-y-z, -2x+y-z, -2x+2y+2z)$,

c) $f(x,y,z) = (-x-3z, 3x+2y+3z, -3x-z)$,

d) $f(x,y,z) = (-x+y+2z, -4x+3y+3z, -3x+y+4z)$,

e) $f(x,y,z) = (5x, 5y, 5z)$.

En cada caso, se pide: calcular los valores propios y los subespacios propios de f; estudiar si f es diagonalizable; si es posible, encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal y una matriz no singular $\mathcal{P}$ tal que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{-1}(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}\mathcal{P}$.

4.- Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcular los valores propios y los subespacios propios de A.

b) ¿Es A diagonalizable?

5.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcular los valores propios y los subespacios propios de f.

b) ¿Es f diagonalizable?

6.- Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcular los valores propios y los subespacios propios de A.

b) Probar que A es diagonalizable y encontrar una matriz no singular $\mathcal{P}$, tal que $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ sea diagonal.

7.- Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (x, y, 3x + y + 2z).$$

a) Demostrar que f es diagonalizable.

b) Encontrar una matriz diagonal $\mathcal{D}$ y una no singular $\mathcal{P}$ verificando que $\mathcal{D} = \mathcal{P}(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}\mathcal{P}^{-1}$.

c) Hallar $((f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}})^m$ para todo valor de m natural.

8.- Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcular el polinomio característico de A, así como sus valores propios.

b) ¿Para que valores del parámetro a es diagonalizable la matriz A?

c) Para dichos valores encontrar una matriz diagonal $\mathcal{D}$ y una matriz no singular $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{D}$.

9.- Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcular el polinomio característico de f, así como sus valores propios.

b) ¿Para que valores del parámetro a es diagonalizable f?

c) Para dichos valores encontrar una matriz diagonal $\mathcal{D}$ y una matriz no singular $\mathcal{P}$ tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{P}^{-1}$.

10.- Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z) = (x + ay + 3z, 2y + bz, z).$$

a) Encontrar los valores de a y b para los que f es diagonalizable.

b) Si $a = 1$ y $b = 3$ encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.- Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$definida por:

$$f(x,y,z) = (-x + y - z, x - y - z, -x - y + z).$$

a) Probar que f es diagonalizable.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ y una matriz no singular $\mathcal{P}$ tales que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sea diagonal y $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\mathcal{P} = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

12.- Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = (3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z).$$

a) Hallar los valores propios de f.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ es diagonal.

c) Calcular una matriz no singular $\mathcal{P}$ tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathcal{P}(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

13.- Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

a) Justificar que f es diagonalizable y encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Calcular una matriz $\mathcal{P}$ tal que $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\mathcal{P} = \mathcal{P}(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

14.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (2x + (a-2)z, y + az, az).$$

a) ¿Para que valores del parámetro a es diagonalizable f?

b) Para dichos valores encontrar una matriz diagonal $\mathcal{D}$ y una no singular $\mathcal{P}$ tal que $(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}= \mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{P}^{-1}$.

Capítulo 6

Producto escalar y ortogonalidad

Definición 6.1. Un *espacio euclídeo* es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V junto con una aplicación, llamada *producto escalar*,

$$\varphi \colon V \times V \to \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes condiciones:

1. $\varphi(u_1+u_2, v) = \varphi(u_1, v)+\varphi(u_2, v)$ y $\varphi(\alpha u, v) = \alpha\varphi(u, v)$, para todo $u_1, u_2, v, u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$, para todo $u, v \in V$.
3. $\varphi(u, u) \geq 0$, para todo $u \in V$.
4. $\varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Es decir, es una forma bilineal simétrica y definida positiva.

Observación 6.2.
- $\varphi(u, 0) = \varphi(0, u) = 0$, para todo $u \in V$.
- $\varphi(u, v) = 0$ para todo $v \in V \Leftrightarrow u = 0$.

Ejemplos 6.3.

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio euclídeo con el producto escalar ordinario $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por:

$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

2. $\mathbb{R}^2$ también es un espacio euclídeo con la aplicación $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2$.

Definición 6.4. Sea (V, φ) un espacio euclídeo. Se llama *longitud* o *norma de un vector* $u \in V$ y se designa por $\|u\|$, al número real no negativo $\left|\sqrt{\varphi(u,u)}\right|$. Se dice que $u \in V$ es un *vector unitario* si $\|u\| = 1$.

Observación 6.5. Sean $u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $\|u\| \geq 0$.
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

Proposición 6.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.** *Sea (V, φ) un espacio euclídeo. Para cualquier par de vectores $u, v \in V$ se verifica:*

$$|\varphi(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$

Demostración. Si $u = 0$, el resultado es claro.

Supongamos $u \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$0 \leq \|\alpha u + v\|^2 = \varphi(\alpha u + v, \alpha u + v) = \alpha^2 \varphi(u,u) + 2\alpha\varphi(u,v) + \varphi(v,v).$$

Como $u \neq 0$, $\varphi(u,u) > 0$ y, si consideramos $\alpha = -\dfrac{\varphi(u,v)}{\varphi(u,u)}$, se tiene que:

$$0 \leq \frac{\varphi(u,v)^2}{\varphi(u,u)^2}\varphi(u,u) - 2\frac{\varphi(u,v)^2}{\varphi(u,u)} + \varphi(v,v)$$

de donde se deduce que

$$\frac{\varphi(u,v)^2}{\|u\|^2} \leq \varphi(v,v) = \|v\|^2$$

y, por ello,

$$|\varphi(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\| \, . \qquad \square$$

Proposición 6.7 (Desigualdad triangular)**.** *Sea (V, φ) un espacio euclídeo. Para cualquier par de vectores $u, v \in V$, se verifica:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \, .$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \varphi(u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2\varphi(u,v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\,|\varphi(u,v)| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \, . \; \square \end{aligned}$$

Observación 6.8. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $|\varphi(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\|$, se deduce que $-\|u\| \, \|v\| \leq \varphi(u,v) \leq \|u\| \, \|v\|$ y así, cuando $u \neq 0$ y $v \neq 0$, se obtiene que:

$$-1 \leq \frac{\varphi(u,v)}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1.$$

La observación anterior justifica la siguiente definición.

Definición 6.9. Sean u y v vectores no nulos de un espacio euclídeo (V,φ). El número real $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\varphi(u,v)}{\|u\| \, \|v\|}$ recibe el nombre de *ángulo que forman los vectores* u y v. Así,

$$\varphi(u,v) = \|u\| \, \|v\| \cos\theta.$$

6.1. Ortogonalidad. Bases ortonormales

Definición 6.10. Sean u y v vectores no nulos de un espacio euclídeo (V,φ) se dice que son *ortogonales* o *perpendiculares* si $\varphi(u,v) = 0$, esto es, cuando forman un ángulo de 90 grados. En este caso escribiremos $u \perp v$.

Consecuencias:

1. 0 es ortogonal a cualquier vector de V.

2. Dos vectores no nulos son ortogonales si, y solo si, su ángulo es de 90°.

3. u y v son vectores ortogonales $\Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

4. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, los vectores de la base canónica son ortogonales dos a dos.

Proposición 6.11. *Si los vectores no nulos $v_1, \ldots, v_r$ son ortogonales dos a dos en el espacio euclídeo (V,φ), entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0$. Entonces, para cada v_j,

$$0 = \varphi(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi(v_i, v_j) = \alpha_j \varphi(v_j, v_j).$$

Al ser $v_j \neq 0$, $\varphi(v_j, v_j) \neq 0$ y, en consecuencia, $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$. □

Definición 6.12. En un espacio euclídeo (V, φ), una base se dice que es *ortogonal* cuando sus vectores son ortogonales dos a dos. Si además, todos los vectores son de norma 1 se dice que es *ortonormal.*

La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

Observación 6.13. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de V y si $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$, entonces $\alpha_i = \dfrac{\varphi(v, v_i)}{\|v_i\|^2}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Esta facilidad para calcular las coordenadas de un vector en una base ortogonal, nos permite hacer una demostración constructiva de la existencia de bases ortogonales en cualquier espacio euclídeo de dimensión finita.

Definición 6.14. Sean (V, φ) un espacio euclídeo y $u, v \in V$. El vector $\dfrac{\varphi(v, u)}{\|v\|^2} v$ se llama *proyección ortogonal* de u sobre v.

Nótese que $\left\| \dfrac{\varphi(v, u)}{\|v\|^2} v \right\| = \dfrac{\varphi(v, u)}{\|v\|^2} \|v\| = \dfrac{\varphi(v, u)}{\|v\|} = \|u\| \cos\theta$, siendo el ángulo θ que forman u y v.

También se cumple que, $v \perp (u - \dfrac{\varphi(v, u)}{\|v\|^2} v)$.

Este resultado nos ilustra sobre la construcción que se hace en el teorema siguiente.

Teorema 6.15. *Todo espacio vectorial euclídeo, (V, φ), de dimensión finita posee una base ortogonal.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

Tomamos $u_1 = v_1 \neq 0$.

Si definimos $u_2 = v_2 - \dfrac{\varphi(u_1, v_2)}{\|u_1\|^2} u_1 \in V$, u_2 es un vector no nulo, porque v_1 y v_2 son linealmente independientes, y $u_1 \perp u_2$, ya que

$$\varphi(u_1, u_2) = \varphi(v_1, v_2 - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\|u_1\|^2} u_1) = \varphi(v_1, v_2) - \frac{\varphi(u_1, v_2)}{\|u_1\|^2} \varphi(v_1, u_1) = 0.$$

Siguiendo este proceso, si definimos $u_j = v_j - \sum\limits_{i=1}^{j-1} \dfrac{\varphi(u_i, v_j)}{\|u_i\|^2} u_i \in V$ se tiene que $u_j \neq 0$, $\forall j$, y $u_i \perp u_j$ si $i \neq j$.

Por tanto, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortogonal de V, ya que es un conjunto de n vectores linealmente independiente en un espacio de dimensión n. $\square$

Corolario 6.16. *Todo espacio vectorial euclídeo, (V, φ), de dimensión finita posee una base ortonormal.*

Demostración. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces se tiene que $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ es una base ortonormal de V. □

Ejercicio 6.17. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, obtener una base ortogonal del subespacio

$$U = \langle v_1 = (1, 2, -1, 0), v_2 = (1, 0, -2, 0), v_3 = (0, 1, 1, 0) \rangle .$$

Demostración. Tomamos $u_1 = (1, 2, -1, 0)$,

$$u_2 = v_2 - \frac{\varphi(v_2, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 = (1, 0, -2, 0) - \frac{3}{6}(1, 2, -1, 0) = \Big(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 0\Big) \text{ y}$$

$$u_3 = v_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\varphi(v_3, u_i)}{\|u_i\|^2} u_i = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, 2, -1, 0) + \frac{5}{7}\Big(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 0\Big).$$ □

Ejercicio 6.18. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se pide:

a) Calcular un vector unitario ortogonal a los vectores:

$(1, -1, 1, 1), (0, -1, 2, 1), (2, 0, 4, 2)$.

b) Obtener una base ortonormal del subespacio

$U = \langle u_1 = (1, 0, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0, 2), u_3 = (0, 1, 0, 0) \rangle$.

Demostración.

a) $$\left.\begin{array}{rrcr} (x, y, z, t) \perp & (1, -1, 1, 1) & \Leftrightarrow & x - y + z + t = 0 \\ (x, y, z, t) \perp & (0, -1, 2, 1) & \Leftrightarrow & -y + 2z + t = 0 \\ (x, y, z, t) \perp & (2, 0, 4, 2) & \Leftrightarrow & 2x + 4z + 2t = 0 \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (\alpha, -\alpha, \alpha, -3\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Por tanto, $\frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, 1, -3)$ es un vector unitario y ortogonal a los pedidos.

b) $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, con $\|v_1\| = \sqrt{3}$,

$v_2 = (1, 1, 0, 2) - \frac{3}{3}(1, 0, 1, 1) = (0, 1, -1, 1)$, con $\|v_2\| = \sqrt{3}$,

$v_3 = (0, 1, 0, 0) - 0(1, 0, 1, 1) - \frac{1}{3}(0, 1, -1, 1) = \Big(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big)$, con $\|v_3\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Así, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1, 1),\ \frac{3}{\sqrt{6}}\Big(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\Big) \right\}$ es una base ortonormal de U.

□

Definición 6.19. Sean U y W subespacios de un espacio euclídeo (V, φ). Diremos que U y W son *ortogonales* si todo vector de U es ortogonal a todo vector de W y escribiremos $U \perp W$.

Nótese que si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ y $\{w_1, \ldots, w_s\}$ son, respectivamente, base de U y W:

$$U \perp W \Leftrightarrow u_i \perp w_j \ \forall i = 1, \ldots, r \text{ y } \forall j = 1, \ldots, s.$$

Definición 6.20. Sea (V, φ) un espacio euclídeo y U un subespacio de V. Se llama *complemento ortogonal* de U al subespacio $U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u, \forall u \in U\}$.

Proposición 6.21. *Si (V, φ) es un espacio euclídeo y U es un subespacio de V, se verifica que:*

1. $U \perp U^\perp$.
2. $V = U + U^\perp$ *y* $U \cap U^\perp = \{0\}$.
3. $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.
4. $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.

Demostración. Si se considera $\{u_1, \ldots, u_r\}$ una base ortogonal de U y se completa a una base de V, $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$, a partir de esta base, usando el Método de Gram-Schmidt, se obtiene una base ortogonal de V, que será de la forma $\{u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ y en este caso $\langle v_{r+1}, \ldots, v_n\rangle \subset U^\perp$.

Puesto que $U \cap U^\perp = \{0\}$, se verifica que $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(U + U^\perp) \leq n$ y, en consecuencia, se tiene que $\langle v_{r+1}, \ldots, v_n\rangle = U^\perp$. Por tanto, $V = U + U^\perp$ y $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$. □

Definición 6.22. Sean (V, φ) un espacio euclídeo, U un subespacio de V y $v \in V$. Existen y son únicos $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tales que $v = u + w$. El vector u se llama *proyección ortogonal* de v sobre U y se denotará por $proy_U v$.

Observación 6.23. Si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es una base ortogonal de U y $v \in V$, entonces

$$proy_U v = \frac{\varphi(v, u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 + \cdots + \frac{\varphi(v, u_r)}{\|u_r\|^2} u_r.$$

Ejercicio 6.24. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, encontrar el complemento ortogonal del subespacio $W = \{(x, y, z) \mid x = y\}$.

Demostración. $W = \langle (1,1,0),(0,0,1)\rangle$.

$$(x,y,z) \in W^{\perp} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow W^{\perp} = \langle(-1,1,0)\rangle. \qquad \square$$

Ejercicio 6.25. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, encontrar el complemento ortogonal de
$U = \{(x,y,z,t) \mid x+y-z+t=0, 2x+y-z+3t=0\}$.

Demostración.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z+t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$U = \{(x,y,z,t) \mid x=-2\beta, y=\alpha+\beta, z=\alpha, t=\beta\} \Leftrightarrow U = \langle(-2,1,0,1),(0,1,1,0)\rangle.$$

$$(x,y,z,y) \in U^{\perp} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+y+t=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$U^{\perp} = \left\{(x,y,z,t) \mid x = -\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t, y=-z\right\} \Leftrightarrow U^{\perp} = \langle(1,2,-2,0),(1,0,0,2)\rangle.$$

De otra forma,

Ya que $U = \{(x,y,z,t) \mid x+y-z+t=0, 2x+y-z+3t=0\}$, se tiene que los vectores $(1,1,-1,1)$ y $(2,1,-1,3)$ pertenecen a $U^{\perp}$. Teniendo en cuenta que son independientes y $\dim(U^{\perp})=2$, se deduce que:

$$\langle(1,1,-1,1),(2,1,-1,3)\rangle = U^{\perp}. \qquad \square$$

Definición 6.26. Sea (V,φ) un espacio euclídeo. Dados $v,u \in V$, se define la *distancia* entre v y u, como

$$d(v,u) = \|v-u\|.$$

Es consecuencia inmediata de la definición que:

1. $d(v,u) \geq 0 \ \forall v,u \in V$.

2. $d(v,u) = 0 \Leftrightarrow v=u$.

3. $d(v,u) = d(u,v)$.

Observación 6.27. Si $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base ortonormal de V, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, entonces

$$\|v-u\|^2 = \varphi(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)v_i, \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)v_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \quad \text{y}$$
$$d(v,u) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Proposición 6.28. *Sean (V,φ) un espacio euclídeo, U un subespacio de V y $v \in V$ de forma que $v = proy_U v + w$ con $w \in U^{\perp}$. Se verifica que*

$$d(v, proy_U v) \leq d(v,u) \ \forall u \in U.$$

Demostración. $v-u = (v - proy_U v) + (proy_U v - u) \ \forall u \in U$.

Como $(v - proy_U v) \in U^{\perp}$ y $(proy_U v - u) \in U$, el teorema de Pitágoras nos dice que $\|v-u\|^2 = \|v - proy_U v\|^2 + \|proy_U v - u\|^2 \geq \|v - proy_U v\|^2$. □

Definición 6.29. Sea (V,φ) un espacio euclídeo. Dados $v \in V$ y U un subespacio de V, se define la *distancia* entre v y U, como

$$d(v,U) = \text{mín}\{d(v,u) \ \forall u \in U\} = d(v, proy_U v).$$

6.2. Distancia de un punto a un hiperplano

Proposición 6.30. *En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, si $v = (p_1, \ldots, p_n)$ es un punto de $\mathbb{R}^n$ y $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ es la ecuación de un hiperplano H, entonces*

$$d(v,H) = \left| \frac{a_1p_1 + \cdots + a_np_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \right|.$$

Demostración. $(a_1, \ldots, a_n) \in H^{\perp}$ y, como $\dim(H^{\perp}) = 1$, se tiene que $H^{\perp} = \langle (a_1, \cdots, a_n) \rangle$.

La base de $H^{\perp}$ se puede completar a una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ de la forma $\mathcal{B} = \{v_1 = (a_1, \ldots, a_n), v_2, \ldots, v_n\}$ y así,

$$v - proy_H v = \frac{a_1p_1 + \cdots + a_np_n}{\|(a_1, \ldots, a_n)\|^2} (a_1, \ldots, a_n) \ \text{ y}$$

$$d(v,H) = \|v - proy_H v\| = \left| \frac{a_1p_1 + \cdots + a_np_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \right|. \qquad \square$$