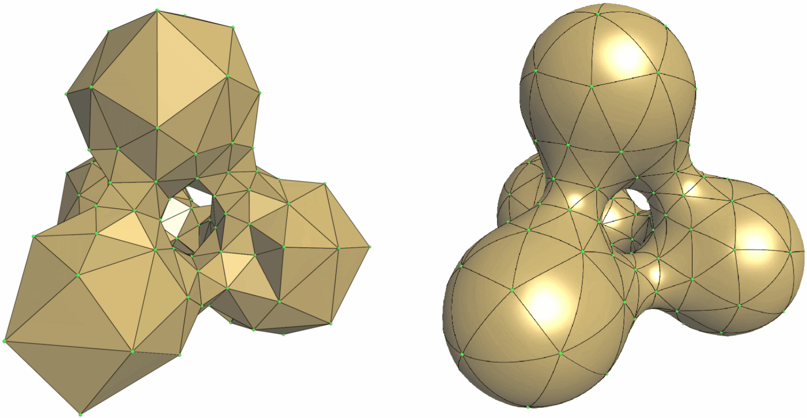
Red EACA: Criterios efectivos y clasificación de transformaciones bilineales y trilineales birracionales

Pablo González Mazón

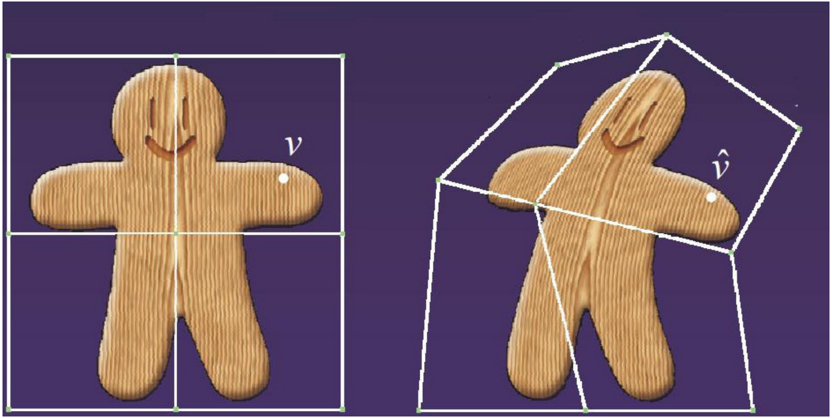
INRIA Sophia-Antipolis
AROMATH: AlgebRa, geOmetry, Modeling and AlgoriTHms
GRAPES: learninG, pRocessing, And oPtimising shapES

6 de Mayo, 2021

Mallados y deformaciones libres de forma



Mallados y deformaciones libres de forma



Fuente: https://www.cnblogs.com/shushen

Transformaciones racionales y birracionales

Un "parche" del mallado se obtiene como la imagen de un dominio canónico Δ (un símplice, un cubo, ...) por una **transformación racional** $\varphi : \Delta \dashrightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$.

Transformaciones racionales y birracionales

Un "parche" del mallado se obtiene como la imagen de un dominio canónico Δ (un símplice, un cubo, ...) por una **transformación racional** $\varphi : \Delta \dashrightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$.

En el espacio proyectivo complejo,

Transformaciones racionales y birracionales

Un "parche" del mallado se obtiene como la imagen de un dominio canónico Δ (un símplice, un cubo, …) por una **transformación racional** $\varphi : \Delta \dashrightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$.

En el espacio proyectivo complejo,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (f_0(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : f_m(x_0, \ldots, x_n)) \end{array}$$

con $f_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneos de grado d.

Transformaciones racionales y birracionales

Un "parche" del mallado se obtiene como la imagen de un dominio canónico Δ (un símplice, un cubo, ...) por una **transformación racional** $\varphi : \Delta \dashrightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$.

En el espacio proyectivo complejo,

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (f_0(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : f_m(x_0, \ldots, x_n)) \end{array}$$

con $f_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneos de grado d.

Una *transformación birracional* es una transf. racional con inversa racional.

Transformaciones racionales y birracionales

Un "parche" del mallado se obtiene como la imagen de un dominio canónico Δ (un símplice, un cubo, ...) por una **transformación racional** $\varphi : \Delta \dashrightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$.

En el espacio proyectivo complejo,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^m \\ & (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (f_0(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : f_m(x_0, \ldots, x_n)) \end{array}$$

con $f_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneos de grado d.

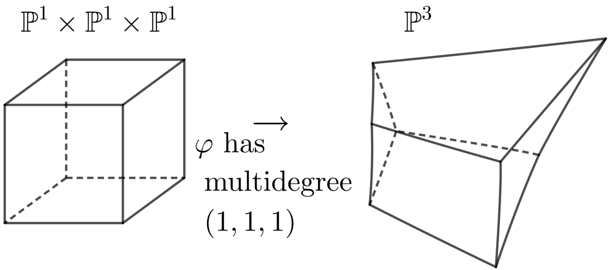
Una *transformación birracional* es una transf. racional con inversa racional.

$$\varphi : X \dashrightarrow Y \ , \ (x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0 : \ldots : f_m) \ , \ \phi : Y \dashrightarrow X \ , \ (y_0 : \ldots : y_m) \mapsto (g_0 : \ldots : g_n)$$

$$\varphi \circ \phi = (g_0(f_0 : \ldots f_m) : \ldots : g_n(f_0 : \ldots f_m)) = (x_0 G(\mathbf{x}) : \ldots : x_n G(\mathbf{x}))$$

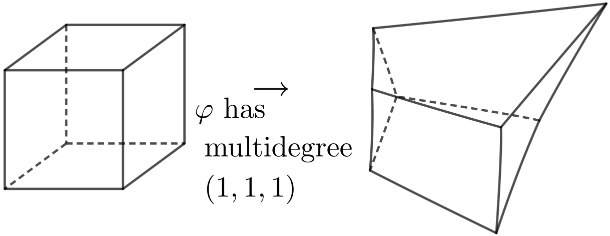
con $G(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$.

Optimización de un mallado birracional



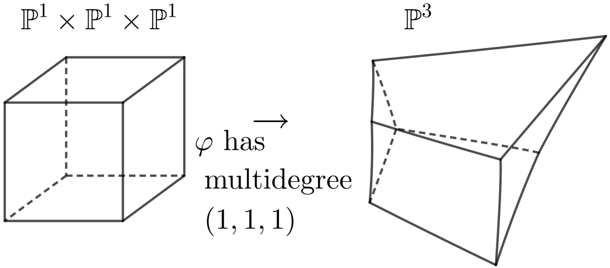
Optimización de un mallado birracional

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\varphi \text{ has multidegree } (1,1,1)} \mathbb{P}^3$$



Optimizar un mallado $\leftrightarrow$ Minimizar un funcional en el espacio de transformaciones racionales

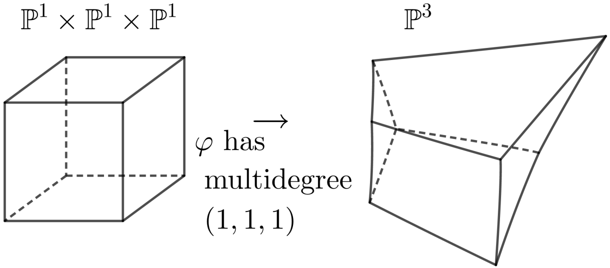
Optimización de un mallado birracional



Optimizar un mallado $\leftrightarrow$ Minimizar un funcional en el espacio de transformaciones racionales

Restringir minimización a una subvariedad de transformaciones **birracionales**.

Optimización de un mallado birracional



Optimizar un mallado $\leftrightarrow$ Minimizar un funcional en el espacio de transformaciones racionales

Restringir minimización a una subvariedad de transformaciones **birracionales**.
Por ejemplo, método de Newton sobre un espacio de funciones birracionales.

Transformaciones multilineales. Conjunto de indeterminación.

En $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1])$, $\mathcal{B}_1 = \{x_0, x_1\}$. Producto tensor de bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{y_0, y_1\}$:

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \{x_0 \otimes y_0, x_1 \otimes y_0, x_0 \otimes y_1, x_1 \otimes y_1\} \equiv \{x_0y_0, x_1y_0, x_0y_1, x_1y_1\} \ ,$$

es una base para las **funciones bilineales** en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Si $\mathcal{B}_3 = \{z_0, z_1\}$,

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3 = \{x_0y_0z_0, x_1y_0z_0, x_0y_1z_0, x_1y_1z_0, x_0y_0z_1, x_1y_0z_1, x_0y_1z_1, x_1y_1z_1\}$$

es una base para las **funciones trilineales** en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Transformaciones multilineales. Conjunto de indeterminación.

En $\mathbb{P}^1 = \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1])$, $\mathcal{B}_1 = \{x_0, x_1\}$. Producto tensor de bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{y_0, y_1\}$:

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \{x_0 \otimes y_0, x_1 \otimes y_0, x_0 \otimes y_1, x_1 \otimes y_1\} \equiv \{x_0y_0, x_1y_0, x_0y_1, x_1y_1\} \; ,$$

es una base para las **funciones bilineales** en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Si $\mathcal{B}_3 = \{z_0, z_1\}$,

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3 = \{x_0y_0z_0, x_1y_0z_0, x_0y_1z_0, x_1y_1z_0, x_0y_0z_1, x_1y_0z_1, x_0y_1z_1, x_1y_1z_1\}$$

es una base para las **funciones trilineales** en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

El *conjunto de indeterminación* (o *base locus*) de una transformación racional φ es la subvariedad de su dominio donde φ no está definida. Si $\varphi : X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^m$ envía $\boldsymbol{x} \in X$ a $(f_0(\boldsymbol{x}) : \ldots : f_m(\boldsymbol{x}))$, el conjunto de indeterminación es $V(f_0, \ldots, f_m) \subset X$.

Notas sobre syzygias

Clasificación de transformaciones bilineales birracionales

$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ bilineal, $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Son equivalentes:

Clasificación de transformaciones bilineales birracionales

$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ bilineal, $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Son equivalentes:

1. φ es **birracional**

Clasificación de transformaciones bilineales birracionales

$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ bilineal, $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Son equivalentes:

1. φ es **birracional**
2. La resolución de $I = (f_0, f_1, f_2)$ como un R-módulo es

$$0 \to R(-2,-1) \times R(-1,-2) \to R(-1,-1)^3 \xrightarrow{(f_0 \ f_1 \ f_2)} I \ ,$$

con matriz de **syzygias** de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_1 & \beta_1 y_0 + \beta_1 y_1 \\ \alpha_3 x_0 + \alpha_4 x_1 & \beta_3 y_0 + \beta_4 y_1 \\ \alpha_5 x_0 + \alpha_6 x_1 & \beta_5 y_0 + \beta_6 y_1 \end{pmatrix}$$

Clasificación de transformaciones bilineales birracionales

$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ bilineal, $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Son equivalentes:

1. φ es **birracional**
2. La resolución de $I = (f_0, f_1, f_2)$ como un R-módulo es
$$0 \to R(-2,-1) \times R(-1,-2) \to R(-1,-1)^3 \xrightarrow{(f_0 \ f_1 \ f_2)} I \ ,$$
con matriz de **syzygias** de la forma
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_1 & \beta_1 y_0 + \beta_1 y_1 \\ \alpha_3 x_0 + \alpha_4 x_1 & \beta_3 y_0 + \beta_4 y_1 \\ \alpha_5 x_0 + \alpha_6 x_1 & \beta_5 y_0 + \beta_6 y_1 \end{pmatrix}$$
3. El conjunto de indeterminación es un **único punto** en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Clasificación de transformaciones bilineales birracionales

$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ bilineal, $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Son equivalentes:

1. φ es **birracional**
2. La resolución de $I = (f_0, f_1, f_2)$ como un R-módulo es
$$0 \to R(-2,-1) \times R(-1,-2) \to R(-1,-1)^3 \xrightarrow{(f_0\ \ f_1\ \ f_2)} I \ ,$$
con matriz de **syzygias** de la forma
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_1 & \beta_1 y_0 + \beta_1 y_1 \\ \alpha_3 x_0 + \alpha_4 x_1 & \beta_3 y_0 + \beta_4 y_1 \\ \alpha_5 x_0 + \alpha_6 x_1 & \beta_5 y_0 + \beta_6 y_1 \end{pmatrix}$$
3. El conjunto de indeterminación es un **único punto** en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
4. φ es un cero de un **único polinomio** de grado 6 en $\mathbb{P}^{11}$ (66 coeficientes)

Inversión vía syzygias

$$(f_0, f_1, f_2) \cdot \begin{pmatrix} a_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ a_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{2} f_i \cdot a_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), \sum_{i=0}^{2} f_i \cdot b_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right) = (0,0)$$

Inversión vía syzygias

$$(f_0, f_1, f_2) \cdot \begin{pmatrix} a_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ a_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{2} f_i \cdot a_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), \sum_{i=0}^{2} f_i \cdot b_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right) = (0,0)$$

Sustituyendo $(f_0 : f_1 : f_2)$ por $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2$,

$$\left(\sum_{i=0}^{2} \alpha_i \cdot a_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), \sum_{i=0}^{2} \alpha_i \cdot b_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right) = (0,0)$$

Inversión vía syzygias

$$(f_0, f_1, f_2) \cdot \begin{pmatrix} a_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ a_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ a_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) & b_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{2} f_i \cdot a_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), \sum_{i=0}^{2} f_i \cdot b_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right) = (0,0)$$

Sustituyendo $(f_0 : f_1 : f_2)$ por $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2$,

$$\left(\sum_{i=0}^{2} \alpha_i \cdot a_i(\mathbf{x},\mathbf{y}), \sum_{i=0}^{2} \alpha_i \cdot b_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right) = (0,0)$$

Si $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ aparecen en una ecuación, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ es una función racional de $\mathbf{y}$.

Un método efectivo

Inmersión de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y (1) $\iff$ (3)

La **inmersión de Segre** de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es el **isomorfismo** racional $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^3$ dado por

$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \mapsto (x_0 y_0 : x_1 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_1)$$

con $\deg(\Sigma) = 2$.

Inmersión de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y (1) $\iff$ (3)

La **inmersión de Segre** de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es el **isomorfismo** racional $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^3$ dado por

$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \mapsto (x_0y_0 : x_1y_0 : x_0y_1 : x_1y_1)$$

con $\deg(\Sigma) = 2$. Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} & \Sigma \subset \mathbb{P}^3 \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook, "\sigma"] \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

donde π es una proyección.

Inmersión de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y (1) $\iff$ (3)

La **inmersión de Segre** de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es el **isomorfismo** racional $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^3$ dado por

$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \mapsto (x_0 y_0 : x_1 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_1)$$

con $\deg(\Sigma) = 2$. Tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} & \Sigma \subset \mathbb{P}^3 \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[ur, hook, "\sigma"] \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

donde π es una proyección.

$$\varphi \text{ es birracional} \iff \pi \text{ es birracional}$$

Ecuación de transformaciones bilineales birracionales y $(1) \iff (4)$

π viene dada un punto en $\mathbb{P}^{11}$, o equivalentemente por la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Ecuación de transformaciones bilineales birracionales y (1) $\iff$ (4)

π viene dada un punto en $\mathbb{P}^{11}$, o equivalentemente por la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

φ es birracional si, y solo si,

$$p = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right),$$

con entradas de grado 3 (o multigrado $(1,1,1)$).

Ecuación de transformaciones bilineales birracionales y (1) $\Longleftrightarrow$ (4)

π viene dada un punto en $\mathbb{P}^{11}$, o equivalentemente por la matriz

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

φ es birracional si, y solo si,

$$p = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right),$$

con entradas de grado 3 (o multigrado $(1,1,1)$). Sustituyendo en $w_0w_3 - w_1w_2 = 0$, obtenemos la ecuación de las transformaciones bilineales birracionales.

Transformaciones trilineales birracionales

A partir de aquí... ¡la investigación sigue en curso!

Transformaciones trilineales birracionales

A partir de aquí... ¡la investigación sigue en curso!

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^7$$
$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \times (z_0 : z_1) \mapsto (x_0 y_0 z_0 : x_1 y_0 z_0 : \ldots : x_0 y_1 z_1 : x_1 y_1 z_1)$$

Transformaciones trilineales birracionales

A partir de aquí... ¡la investigación sigue en curso!

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^7$$
$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \times (z_0 : z_1) \mapsto (x_0 y_0 z_0 : x_1 y_0 z_0 : \ldots : x_0 y_1 z_1 : x_1 y_1 z_1)$$

Ahora $\pi : \Sigma \subset \mathbb{P}^7 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ es una proyección desde un subespacio 3-dimensional (un $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$).

Transformaciones trilineales birracionales

A partir de aquí... ¡la investigación sigue en curso!

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^7$$
$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \times (z_0 : z_1) \mapsto (x_0y_0z_0 : x_1y_0z_0 : \ldots : x_0y_1z_1 : x_1y_1z_1)$$

Ahora $\pi : \Sigma \subset \mathbb{P}^7 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ es una proyección desde un subespacio 3-dimensional (un $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$).
El conjunto de indeterminación $V(I)$ **tiene codimensión al menos 2**. Puede clasificarse en base su multigrado. Nos centramos en multigrados...

1. ... $(1, 1, 1)$

Transformaciones trilineales birracionales

A partir de aquí... ¡la investigación sigue en curso!

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^7$$
$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \times (z_0 : z_1) \mapsto (x_0y_0z_0 : x_1y_0z_0 : \ldots : x_0y_1z_1 : x_1y_1z_1)$$

Ahora $\pi : \Sigma \subset \mathbb{P}^7 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ es una proyección desde un subespacio 3-dimensional (un $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$).

El conjunto de indeterminación $V(I)$ **tiene codimensión al menos 2**. Puede clasificarse en base su multigrado. Nos centramos en multigrados...

1. ... $(1, 1, 1)$
2. ... $(1, 1, 0)$

Transformaciones trilineales birracionales

A partir de aquí... ¡la investigación sigue en curso!

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{P}^7$$
$$(x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \times (z_0 : z_1) \mapsto (x_0y_0z_0 : x_1y_0z_0 : \ldots : x_0y_1z_1 : x_1y_1z_1)$$

Ahora $\pi : \Sigma \subset \mathbb{P}^7 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ es una proyección desde un subespacio 3-dimensional (un $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$).

El conjunto de indeterminación $V(I)$ **tiene codimensión al menos 2**. Puede clasificarse en base su multigrado. Nos centramos en multigrados...

1. ... $(1, 1, 1)$
2. ... $(1, 1, 0)$
3. ... $(1, 0, 0)$

Clasificación experimental de transformaciones trilineales birracionales

$R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$, $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1]$. M.g. $\equiv$ multigrado

M.g. del C.I.	Resolución libre de I	Grado de inversa
(0,0)	$0 \to R(-2,-1) \times R(-1,-2) \to R(-1,-1)^3 \to R$	1×1
(1,1,1)	$0 \to S^3 \to S^4 \to S$	$1 \times 1 \times 1$
(1,1,0)	$0 \to S \to S^4 \to S^4 \to S$	$1 \times 1 \times 2$
(1,0,0)	$0 \to S^2 \to S^5 \to S^4 \to S$	$1 \times 2 \times 2$

Clasificación experimental de transformaciones trilineales birracionales

$R = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$, $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1]$. M.g. $\equiv$ multigrado

M.g. del C.I.	Resolución libre de I	Grado de inversa
(0,0)	$0 \to R(-2,-1) \times R(-1,-2) \to R(-1,-1)^3 \to R$	1×1
(1,1,1)	$0 \to S^3 \to S^4 \to S$	$1 \times 1 \times 1$
(1,1,0)	$0 \to S \to S^4 \to S^4 \to S$	$1 \times 1 \times 2$
(1,0,0)	$0 \to S^2 \to S^5 \to S^4 \to S$	$1 \times 2 \times 2$

Transformación trilineal genérica: $0 \to S \to S^{21} \to S^{62} \to S^{69} \to S^{30} \to S^4 \to S$